Universidad de Alcalá de Henares
Departamento de Física
Examen de Ampliación de Física (Septiembre 2003)

P.1.- Un circuito RLC es alimentado por un receptor que convierte en señal eléctrica una onda de sonido, plana y armónica, que incide sobre él. La carga en el condensador en régimen estacionario viene dada por la expresión

$$Q(t) = 20\cos\left(6.8\pi \times 10^3 t - 0.15\pi\right) \quad (1)$$

con $Q(t)$ en nC y t en s, y si R=95 Ω, L=5 mH, C=0.3 μF y la velocidad de fase del sonido es 340 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, determine:

1. La frecuencia de resonancia del circuito.
2. La frecuencia, la longitud de onda y el número de ondas de la onda acústica.
3. ¿Con qué velocidad y en qué sentido debe moverse el conjunto receptor-circuito a lo largo de la dirección de propagación de la onda acústica para que las oscilaciones de carga en el condensador inducidas por la señal del receptor tengan la máxima amplitud?

Valoración máxima: 2 puntos

SOLUCIÓN

La acción de la onda incidente sobre el receptor da lugar a una oscilación en el circuito RLC, la cual consta de dos componentes: una oscilación transitoria –superposición de la oscilación incidente más la oscilación amortiguada del sistema oscilante–, más una oscilación forzada estacionaria. La amplitud de esta última depende de la frecuencia con que es alimentado el circuito por el receptor. Para un cierto valor, conocido como *frecuencia de resonancia* y determinado por las características del circuito, dicha amplitud alcanza un máximo.

La ecuación 1 es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC}Q = \varphi_0 \cos(\omega t)$$

que comparada con la ecuación diferencial

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + 2\gamma\frac{d\psi}{dt} + \omega_0^2\psi = F_0\cos(\omega t)$$

nos dice que:

$$\gamma = \frac{R}{2L}$$
$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

1. *Frecuencia de resonancia:*
   La frecuencia de resonancia es $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$, y con los datos del problema, obtenemos

$$\boxed{\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} = 22.1 \times 10^3\,\mathrm{rad/s}}$$

La frecuencia lineal correspondiente es

$$\boxed{f_r = \omega_r/(2\pi) = 3.5\,\mathrm{kHz}}$$

2. *Frecuencia de la onda acústica:*
Coincide con la frecuencia de oscilación forzada. De la ecuación 1 tenemos que $\omega = 6.8\pi \times 10^3\,\mathrm{rad/s}$ y la frecuencia es $f = \omega/(2\pi)$:

$$\boxed{f = \frac{\omega}{2\pi} = 3.4\,\mathrm{kHz}}$$

Longitud de onda de la onda acústica:
Si $c = 340\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ es la velocidad de fase, entonces $\lambda = c/f = 2\pi c/\omega$

$$\boxed{\lambda = 0.1\,\mathrm{m}}$$

Número de ondas:
El número de ondas viene dado por $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$

$$\boxed{k = 20\pi\,\mathrm{m^{-1}}}$$

3. En la oscilación forzada la amplitud es función de la frecuencia aplicada. La máxima amplitud corresponde a la frecuencia de resonancia ω_r (f_r); en el enunciado se nos dice que esto se logra moviendo el receptor en la dirección de propagación de la onda, es decir acercándose o alejándose del foco emisor de ondas (efecto Doppler). Para determinar si se acercan o alejan calcularemos la frecuencia de resonancia, y si es mayor que la frecuencia de la onda se acercan, y si es menor se alejan.
En el primer apartado se ha obtenido la frecuencia de resonancia

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} = 22.1 \times 10^3\,\mathrm{rad/s}$$

que es mayor que ω por lo que el receptor se mueve en el sentido opuesto al de propagación:

$$\omega_r = \omega \frac{c+v}{c}$$

de donde se obtiene

$$\boxed{v = 11.2\,\mathrm{m/s}}$$

P.2.- Dos emisores puntuales de ondas electromagnéticas (velocidad de fase en el vacío $c = 3 \times 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ se disponen según se indica en la figura. Ambas fuentes emiten coherentemente con un desfase de π radianes, a una frecuencia de 300 GHz y con la misma potencia.

1. Determine el carácter de la interferencia en el punto O.
2. Si el conjunto está en un medio con índice de refracción n = 1.5, determine el carácter de la interferencia en O.
3. Si la potencia de emisión es 4 μW, determine la intensidad en O en cada caso.

Valoración máxima: 2 puntos

SOLUCIÓN

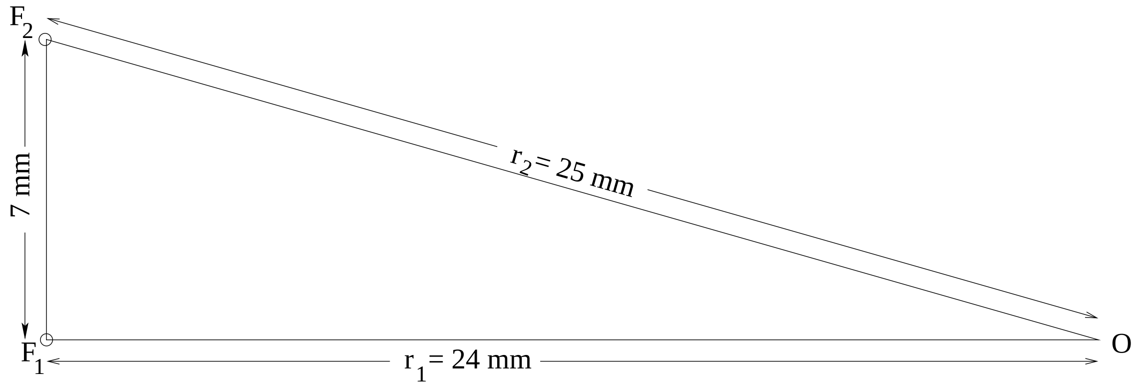

Figure 1:

1. *Carácter de la interferencia en O:*
   Dado que las oscilaciones en los focos emisores son de la misma frecuencia, en el punto O de la figura 1 la oscilación es la superposición de las dos ondas $\varphi_1(r,t) = A_1 \cos(\omega t - kr_1)$ y $\varphi_2(r,t) = A_2 \cos(\omega t - kr_2 - \delta_0)$:
   $$\varphi(r,t) = \varphi_1(r_1,t) + \varphi(r_2,t)$$
   donde δ_0 es el desfase entre los focos, dado en el enunciado: $\delta_0 = \pi$. La intensidad en el punto O es
   $$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta \tag{2}$$
   siendo δ la diferencia de fase entre ambas señales:
   $$\delta = k\,(r_2 - r_1) + \delta_0 = \frac{2\pi}{\lambda}\,(r_2 - r_1) + \delta_0 = \frac{2\pi f}{c}\,(r_2 - r_1) + \delta_0$$
   En la figura vemos que por aplicación del teorema de Pitágoras $r_2 = 25\,\mathrm{mm}$; introduciendo este valor y los de r_1, f, c y δ_0, llegamos a
   $$\delta = \frac{2\pi \times 3 \times 10^{11}}{3 \times 10^{11}} + \pi = 2\pi + \pi = 3\pi$$
   que hace mínimo el valor del coseno (-1) y la ***interferencia es destructiva***.

2. *Carácter de la interferencia en O si n=1.5:*
   En este caso la velocidad de propagación es

$$c' = \frac{c}{n} = \frac{3 \times 10^{11}}{1.5}\,\text{mm/s}$$

   por lo que la longitud de onda es

$$\lambda' = \frac{c'}{f} = \frac{3 \times 10^{11}}{1.5 \times 3 \times 10^{11}} = \frac{2}{3}\,\text{mm}$$

   y la diferencia de fase es

$$\delta = k'\left(r_2 - r_1\right) + \delta_0 = \frac{2\pi}{\lambda'}\left(r_2 - r_1\right) + \delta_0 = 3\pi + \pi = 4\pi$$

   que hace máximo al coseno $(+1)$ y la ***interferencia es constructiva***.

3. Las intensidades que llegan al punto O son:

$$I_1 = \frac{P}{4\pi r_1^2}$$

   y

$$I_2 = \frac{P}{4\pi r_2^2}$$

   Aplicando la ecuación 2 para la intensidad tenemos:

   a) $I = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} = \left(\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2}\right)^2 = \left(\sqrt{\dfrac{P}{4\pi r_1^2}} - \sqrt{\dfrac{P}{4\pi r_2^2}}\right)^2 = 0.9\,\mu\text{W/m}^2$

b) $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} = \left(\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{P}{4\pi r_1^2}} + \sqrt{\frac{P}{4\pi r_2^2}}\right)^2 = 2\,\mathrm{mW/m^2}$

T.1.- Un oscilador armónico se describe mediante una función coseno con fase inicial nula. Determine, en el intervalo de un periodo, cuándo los siguientes pares de magnitudes tienen sentido contrario:

1. Desplazamiento y velocidad
2. Velocidad y aceleración
3. Desplazamiento y aceleración

Valoración máxima: 1.5 puntos

SOLUCIÓN

En la figura 2 se muestran los fasores representativos de la elongación (desplazamiento), x, de la velocidad, v, y aceleración, a, en dos instantes distintos. Cada uno de los fasores va adelantado $\pi/2$ rad con respecto al anterior, por lo que nunca se encontrarán dos fasores en el mismo cuadrante. Este conjunto de fasores gira con velocidad angular ω, y se mantiene el ángulo entre ellos. Sus proyecciones sobre el eje X deben ser de signo contrario para cumplir las condiciones del enunciado (función coseno).

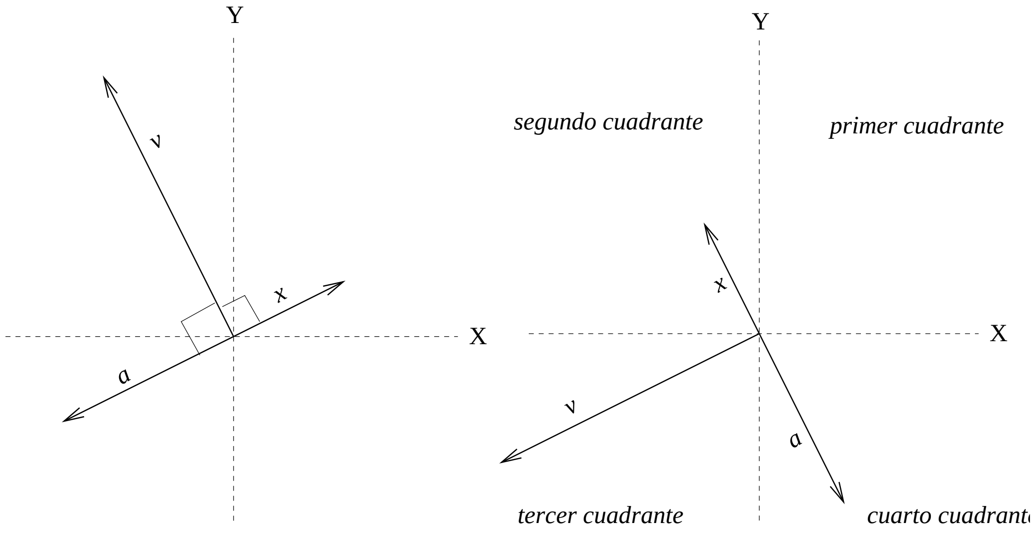

Figure 2:

En la figura 2-izquierda vemos que los fasores elongación y velocidad tienen sus proyecciones sobre X de signo opuesto, situación que se repite cuando el fasor elongación esté en el tercer cuadrante.
En la figura 2-derecha vemos que los fasores velocidad y aceleración tienen sus proyecciones X de signo contrario, situación que se repite cuando el fasor velocidad esté en el primer cuadrante. Esto sucede cuando la elongación se encuentra, respectivamente, en el segundo o en el cuarto cuartos de periodo. Por tanto

1. El desplazamiento y la velocidad son de signo opuesto en los 1º y 3º cuartos de periodo.
2. La velocidad y la aceleración son de sentido contrario en los 2º y 4º cuartos de periodo.
3. La elongación y la aceleración son de signo contrario en todo momento, por ser fasores de sentidos opuestos (esto mismo se puede deducir de la relación $a = -\omega^2 x$).

T.2.- La velocidad de propagación de las ondas transversales en una cuerda de 1 m de longitud, con sus extremos ($x = 0$ m y $x = 1$ m) fijos, es 320 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

1. Determine, justificando la respuesta, cuáles de las siguientes expresiones, representan ondas estacionarias en dicha cuerda.
2. En los casos afirmativos, indique qué armónicos se hallan presentes.

   a) $y(x,t) = 0.01 \sin(3\pi x) \cos(900\pi t)$
   b) $y(x,t) = 0.01 \sin(5\pi x) \cos(1600\pi t)$
   c) $y(x,t) = 0.01 \sin(\pi x - 300\pi t)$
   d) $y(x,t) = 0.01 \sin(\pi x) \sin(300\pi t) + 0.002 \sin(6\pi x) \cos(1800\pi t)$
   e) $y(x,t) = 0.01 \cos(2\pi x) \sin(600\pi t)$

Valoración máxima: 1.5 puntos

SOLUCIÓN

Para que las ondas en la cuerda sean ondas estacionarias con los extremos fijos se debe cumplir:

- $y(0,t) = y(1,t) = 0$ como consecuencia de tener los extremos fijos.
- en la función $y(x,t)$ no debe aparecer el término de propagación; es decir las fases no pueden ser del tipo $\omega t \pm kx$.
- las frecuencias ω tienen que ser múltiplos enteros de la frecuencia fundamental ω_0.

A partir de la primera condición vemos que la expresión (e) no representa la onda estacionaria del enunciado, pues tanto para $x = 0$ como para $x = 1\,\text{m}$ el coseno vale $+1$, dando un valor de $y(0,t) = y(1,t) \neq 0$.

A partir de la segunda condición vemos que la expresión (c) tampoco es válida, pues la fase contiene el término de propagación.

Para ver cuáles de las restantes expresiones se ajustan al enunciado, debemos calcular la frecuencia del modo fundamental. En el modo fundamental entre los dos extremos (ceros de amplitud) hay un solo máximo; es decir que la longitud de onda $\lambda_o = 2l$ siendo l la longitud de la cuerda. La frecuencia del modo fundamental,

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi \frac{c}{\lambda_0} = \frac{\pi c}{l} = 320\pi \,\text{rad/s}$$

Sólo en la expresión (b) aparece una frecuencia 1600π que es múltiplo entero de 320π, y es en consecuencia la única expresión válida. En conclusión

1. La expresión (b) representa ondas estacionarias en la cuerda.
2. La expresion (b) contiene el 4º armónico ($= n - 1 = (1600\pi)/(320\pi) - 1 = 4$).

T.3.- En un determinado día de invierno, la capa más baja de la atmósfera, de espesor 200 m, tiene un índice de refracción de $n_1 = 1.2$, y por encima de esa altura el índice es $n_2 = 1$. Un observador en el suelo divisa una avioneta que viaja hacia la izquierda a lo largo del eje X, cuando mira con un ángulo de 30^0 hacia la derecha respecto de su vertical. Un minuto después, el observador ve la avioneta sobre él. Si efectúa su vuelo a velocidad constante y a una altura fija de 1000 m,

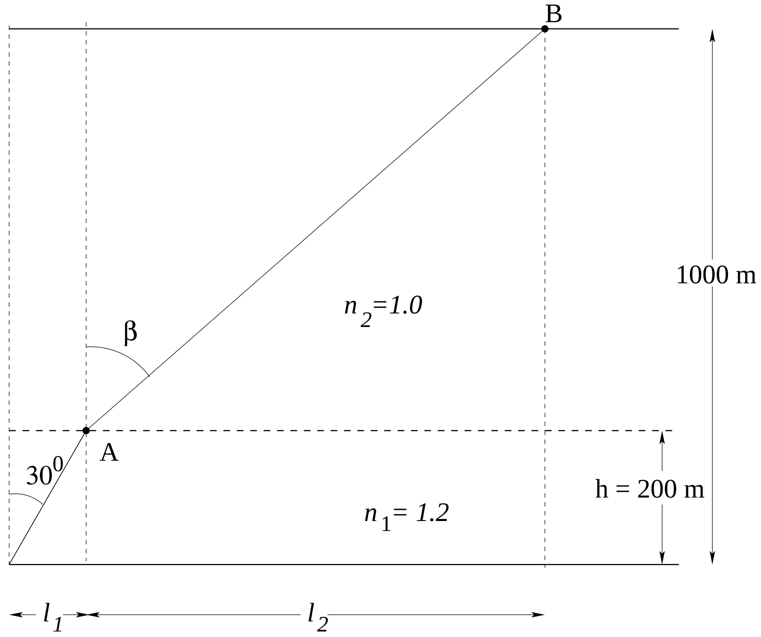

Figure 3:

1. ¿Cuál es la velocidad de la avioneta?
2. Si la avioneta emite un tono de frecuencia f_0, razone en qué instante del intervalo de tiempo [0,60] segundos la frecuencia percibida por el observador es más aguda.

Valoración máxima: 1.5 puntos

SOLUCIÓN

1. Cuando la avioneta se encuentra en B (figura 3) el observador la ve bajo un ángulo con la vertical de 30^0. El rayo procedente de B corta a la superficie de separación entre los dos medio en el punto A. Aplicamos la ley de la refracción en el punto A

$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta$$

a partir de la cual podemos calcular β:

$$\sin\beta = \frac{n_1}{n_2}\sin\alpha\,; \quad \sin\beta = \frac{1.2}{1}\sin 30 = 0.6 \quad \beta = 36.9^0$$

Hasta llegar a la vertical recorre una distancia $l = l_1 + l_2 = vt = 200\tan 30 + 800\tan 36,9$ de donde se puede despejar v:

$$v = \frac{200\tan 30 + 800\tan 36,9}{60} = 12\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

2. Desde el punto B hasta la vertical, la avioneta se acerca al observador (la distancia decrece con el tiempo), por lo que la frecuencia percibida es

$$f' = f_0 \frac{c}{c - v^*}$$

donde v^* es la componente de la velocidad de la avioneta en la dirección al observador, dada por:

$$v^* = vsen\alpha$$

Aquí, v es la velocidad de la avioneta y α el ángulo entre la vertical y la dirección de la avioneta al observador. Al desplazarse la avioneta, el ángulo α varía, decreciendo durante el intervalo [0,60] segundos desde un valor máximo en t=0 s hasta el valor de cero cuando, en t=60 s, la avioneta se sitúa sobre el observador. Por lo tanto, en el intervalo mencionado, la componente v^* es máxima en el instante t=0 s, y disminuye progresivamente hasta anularse en t=60 s. En conclusión, el denominador en la expresión de la frecuencia percibida es mínimo en t=0 s, dentro del intervalo considerado, y **es en este instante cuando esa frecuencia es mayor, es decir, más aguda**, que en el resto del intervalo.

T4.- Una onda unidimensional se representa por la función

$$y(x,t) = A_0 e^{-bt} \sin(kx - \omega t)$$

con x e y en metros y t en segundos.

1. Razone si los puntos del medio realizan oscilaciones amortiguadas u oscilaciones armónicas.
2. En un punto fijo del medio de propagación, calcule el tiempo que tarda en reducirse la amplitud desde A_0 a A_0/e, cuando $b = 0.1$ s^{-1}.
3. Calcule la diferencia de niveles de intensidad en el punto anterior entre los instantes $t = 1$ s y $t = 8$ s.

Valoración máxima: 1.5 puntos

SOLUCIÓN

1. Cada valor de x representa un punto del medio. Si consideramos un valor de $x = x_0$ determinado la función oscila según $A_0 e^{-bt} \sin(kx_0 - \omega t)$, que representa una oscilación de frecuencia ω cuya amplitud decrece con el tiempo según $A(t) = A_0 e^{-bt}$. Por lo tanto, en cada punto del medio encontramos una ***oscilación amortiguada***.
2. La amplitud decrece según
$$A = A_0 e^{-bt} \tag{3}$$
Se pide el tiempo para el cual se llega a $A/A_0 = e^{-1}$; considerando la expresión 3, este tiempo corresponde a
$$-bt = -1$$
y, dado el valor de b, tenemos:
$$\boxed{t = \frac{1}{b} = 10\,\mathrm{s}}$$
3. En un punto dado, el nivel de intensidad en el instante $t = 1$ s es
$$\mathrm{NI}(t=1) = 10 \log \frac{I(1)}{I_{ref}}$$
y en $t = 8$ s
$$\mathrm{NI}(t=8) = 10 \log \frac{I(8)}{I_{ref}}$$
La variación de niveles es
$$\Delta\mathrm{NI} = 10 \log \frac{I(1)}{I_{ref}} - 10 \log \frac{I(8)}{I_{ref}} = 10 \log \frac{I(1)}{I(8)}$$
Puesto que $I(t) \propto A^2(t)$, y $A(t) = A_0 e^{-bt}$, se tiene que el valor $I(1) \propto A_0^2 e^{-2\times 0.1\times 1} = A_0^2 e^{-0.2}$ y el valor $I(8) \propto A_0^2 e^{-2\times 0.1\times 8} = A_0^2 e^{-1.6}$ por lo que
$$\boxed{\Delta\mathrm{NI} = 10 \log \frac{A_0^2 e^{-0.2}}{A_0^2 e^{-1.6}} = 10 \log e^{1.4} = 6.1\,\mathrm{dB}}$$