SOLUCIÓN DEL EXAMEN DE AMPLIACIÓN DE FÍSICA. JUNIO 2002. I.T.T.

P.1.- . Una persona de 80 kg, haciendo "puenting", se deja caer verticalmente desde lo alto de un puente de 50 m de altura, atada a una cuerda elástica de 20 m de longitud cuando está distendida.

a) Determínese el valor de la constante elástica de la cuerda si la persona está sometida a una fuerza neta nula a 25 m debajo del puente.

b) Calcule el valor de la energía cinética de la persona, cuando está cayendo, a 20 m y a 25 m debajo del puente.

c) Determine la mínima altura por encima del suelo a la que llegará la persona.

d) Suponiendo que la oscilación es amortiguada, y que su coeficiente de amortiguamiento es $\gamma = 0.1\ \mathrm{s}^{-1}$, ¿cuántas oscilaciones habrá realizado cuando la amplitud se haya reducido a 1/10 de la amplitud inicial?

SOLUCIÓN

Como la caída es vertical, la oscilación resultante tiene lugar a lo largo de la vertical que la tomamos como eje *OY*. Despreciando el peso de la cuerda, cuando la cuerda está distendida tiene una longitud vertical de 20 m.. Este extremo de la cuerda lo tomaremos como origen de distancias, dando sentido positivo hacia el suelo.

a.- Cuando la cuerda está estirada, tenemos dos fuerzas aplicadas sobre la persona y de sentido contrario: la primera es el peso y la segunda la fuerza elástica. De acuerdo con el enunciado si $\Delta y = 25 - d = 25 - 20 = 5\ \mathrm{m}$, la fuerza neta sobre la persona es nula, y por tanto la fuerza elástica es igual y de signo contrario al peso

$$\boxed{F_e = P \;\Rightarrow\; k\,\Delta y = m\,g \;\Rightarrow\; k = \frac{m\,g}{\Delta y} = \frac{80\times 9{,}8}{5} = 156{,}8\ \mathrm{N\,m^{-1}}} \qquad [1]$$

b.- Tanto el peso como la fuerza elástica son fuerzas conservativas, de modo que la fuerza elástica empieza a actuar para valores de *y* positivos.

Desde el puente hasta el punto A ($y = 0$ (d = 20 m)), sólo actúa el peso y en consecuencia:

$$E_{CA} + U_A = E_{C,Puente} + U_{Puente}$$

$$\boxed{E_{CA} = E_{C,Puente} + (U_{Puente} - \mathrm{U_A}) = 0 + m\,g\,d = 80\times 9{,}8\times 20 = 15680\ \mathrm{J}}$$

A partir del punto A y hasta el punto H (Δy = 5 m), actúan las fuerzas contrarias del peso y la fuerza elástica y se debe verificar que el trabajo de dichas fuerzas sea la variación de energía cinética; así:

$$\vec{F}_e = -k\,y\,\vec{j}\ ;\ \vec{P} = m\,g\,\vec{j}\ ;\ T = \Delta E_c$$

$$T = \int_0^5 (m\,g - k\,y)\,\vec{j} \bullet dy\,\vec{j} = E_{C,H} - E_{C,A} \qquad [2]$$

$$\boxed{E_{C,H} = E_{C,A} + 5\,m\,g - \frac{1}{2}k\,(5)^2 = 15680 + 5\times 80\times 9{,}8 - 0{,}5\times 156{,}8\times 25 = 17640\ \mathrm{J}}$$

c.- Para determinar la posición más cercana al suelo se realiza el mismo planteamiento, pero con la condición de que en ese punto, F, la energía cinética debe ser cero; por tanto:

$$T = \int_0^{y_F} (m\,g - k\,y)\,\vec{j}\cdot dy\,\vec{j} = E_{C,F} - E_{C,A} = -m\,g\,d$$

$$m\,g\,y_F - \frac{1}{2}k\,y_F^2 = -m\,g\,d \quad\Rightarrow\quad m\,g\,y_F - \frac{1}{2}\frac{m\,g}{5}y_F^2 = -20\,m\,g$$

$$y_F^2 - 10\,y_F - 200 = 0 \quad\Rightarrow\quad y_F = 20\ \mathrm{m}$$

y en consecuencia la distancia sobre el suelo, h_F, será:

$$\boxed{h_F = 50 - y_F - d = 50 - 20 - 20 = 10\ \mathrm{m}}$$

d.- La oscilación amortiguada que realiza es:

$$y(t) = A(t)\cos(\omega t - \delta)\ \ /\ \ A(t) = A\,e^{-\gamma t} \quad \mathrm{y} \quad \omega = \left[\omega_0^2 - \gamma^2\right]^{1/2} \qquad [3]$$

$$A(t) = \frac{A}{10} = A\,e^{-\gamma t} \quad\Rightarrow\quad Ln\,(10) = \gamma\,t \;\Rightarrow\; t = \frac{Ln\,(10)}{0{,}1} = 23{,}03\ \mathrm{s}$$

y el número de oscilaciones, *n*, teniendo en cuenta [1] y [3] es:

$$\boxed{n = \frac{t}{T} = \frac{t\,\omega}{2\pi} = \frac{t\left[(k/m) - \gamma^2\right]^{1/2}}{2\pi} = \frac{23{,}03\left[156{,}8/80 - 0{,}01\right]^{1/2}}{2\pi} = 5{,}11 \approx 5\,\text{oscilaciones}}$$

P.2.- Una onda plana está representada por la función $y = 10\cos(900\,t - 10\,x)$ en donde *y* está expresada en micrómetros, el tiempo *t* en segundos y el desplazamiento *x* en metros.

a) Amplitud de desplazamiento de las partículas.

b) Longitud de onda.

c) Velocidad máxima de vibración.

d) Velocidad de propagación de la onda

e) Si el medio de propagación tiene una constante de absorción $\beta = 0.01$ m^{-1}, la distancia que recorre la onda hasta que su intensidad disminuye en un 50 %.

SOLUCIÓN

Para resolver el ejercicio hemos de identificar variables y parámetros entre la función de ondas general y la que se da en el enunciado, así tenemos las funciones:

$$y(x,t) = A\cos(\omega t - k\,x) \quad ; \quad y(x,t) = 10^{-5}\cos(900\,t - 10\;x) \qquad [1]$$

en las cuales *y* y *x* están en metros y *t* en segundos.

Identificando términos en [1] se tiene:

$$\omega = 900 \text{ rad/s} \quad ; \quad k = 10 \text{ m}^{-1} \quad ; \quad A = 10^{-5} \text{ m} \qquad [2]$$

a.- De [2], la amplitud de la onda es $\boxed{A = 10^{-5}\text{ m}}$

b.- De [2], la longitud de onda, λ, es $\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5} = 0{,}63\,\text{m}}$

c.- Para determinar la velocidad de vibración máxima de las partículas del medio, tenemos que derivar [1] respecto del tiempo, así:

$$v_b = \frac{\partial\, y(x,t)}{\partial\, t} = -10^{-5} \times 900\,\text{sen}\,(900\,t - 10\,x) \qquad [3]$$

y en consecuencia la expresión [3] es máxima cuando el seno vale *–1*; $\boxed{v_{b,\,max} = 9\times 10^{-3}\text{ m/s}}$

d.- De [2], la velocidad de propagación de la onda, c, es $\boxed{c = \frac{\omega}{k} = \frac{900}{10} = 90\text{ m/s}}$

e.- Si el medio es absorbente la intensidad del movimiento ondulatorio, *I*, decrece exponencialmente a medida que penetra en él, por tanto:

$$I(x) = I(0)\,e^{-\beta x} \qquad [4]$$

siendo *"x"* la distancia recorrida en el medio. Teniendo en cuenta las condiciones dadas:

$$I(x) = 0.5\,I(0) = I(0)\,e^{-\beta x} \quad \Rightarrow \quad 0{,}5 = e^{-0{,}01\,x} \quad \Rightarrow \quad Ln\,(2) = 0{,}01\,x$$

$$\boxed{x = \frac{Ln(2)}{0{,}01} = 69{,}3\text{ m}}$$

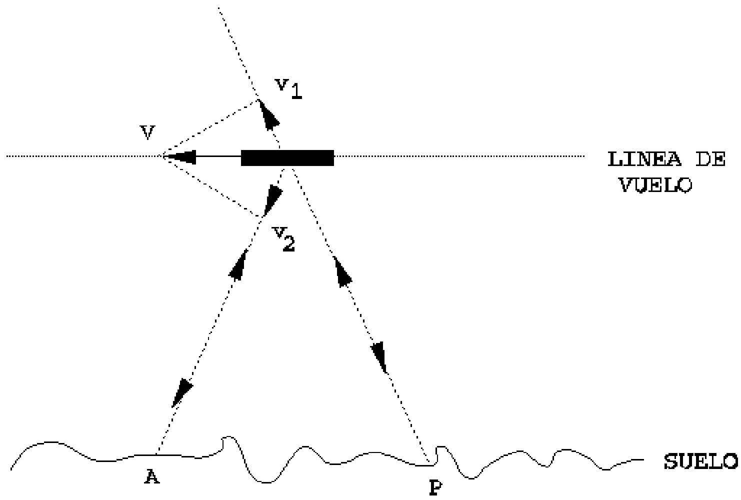
C1.- Dos sonidos de intensidades superiores a la umbral, se propagan simultáneamente en un mismo medio. Indique cual debe ser la relación entre sus frecuencias, amplitudes, y fases en un cierto punto P del medio si en P no se oye ningún sonido.

SOLUCIÓN

Para que en el punto P no se detecte sonido alguno permanentemente debe producirse una interferencia destructiva entre los dos sonidos. Por consiguiente debe cumplirse:
1.- Las frecuencias deben coincidir, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, para que el patrón de interferencias se mantenga en el tiempo
2.- La diferencia de fases, $\delta = k(r_2 - r_1) + (\varphi_1 - \varphi_2)$, donde k es el número de ondas, $r_2 - r_1$ es la diferencia de caminos desde el punto P a los emisores y φ_1 - φ_2 es la diferencia de fases de vibración de los focos. La diferencia de fases debe ser un múltiplo impar de π radianes para asegurar la interferencia destructiva.
3.- Las amplitudes deben ser iguales, o su diferencia inferior a la amplitud umbral del detector, $|A_1 - A_2| \le A_{umbral}$, para que la interferencia destructiva dé unos valores de señal acústica no detectables.

C.2.- Un avión determina su velocidad respecto al suelo emitiendo dos ondas armónicas electromagnéticas de la misma frecuencia: una de ellas hacia delante y hacia el suelo; la otra, hacia atrás y hacia el suelo. Las dos ondas, una vez reflejadas en la superficie irregular del suelo, son detectadas simultáneamente por un receptor común a bordo del avión. ¿Qué tipo de señal detecta el receptor y cómo se consigue determinar la velocidad del avión? Razone la respuesta.

SOLUCIÓN



Sea f_0 la frecuencia de emisión del foco situado en el avión. Al estar el emisor en movimiento respecto del suelo, la frecuencia percibida en el suelo es distinta de la emitida; el suelo radiará en todas las direcciones con esta frecuencia distinta y en el avión, que hace ahora las veces de receptor, al estar en movimiento respecto del suelo se percibirá otra frecuencia diferente de la emitida por el suelo. ¿Cómo son estas frecuencias para el caso (1) radiación emitida hacia atrás y para el caso (2) radiación hacia adelante?

En la figura se observa el proceso; así en el caso (1) para un observador situado en P ve que el foco se aleja con una velocidad v_1 (proyección de la velocidad del avión sobre la dirección avión–P), y por tanto la frecuencia percibida en P, f_1, es menor que la emitida. El punto P emite con esta frecuencia percibida, f_1, y como el avión se aleja con velocidad v_1, en el detector situado en el avión se percibe una frecuencia, f_1^*, menor que f_1.

Para el caso (2) todo es similar, así para un observador situado en A ve que el foco se acerca con una velocidad v_2 (proyección de la velocidad del avión sobre la dirección avión–A), y por tanto la frecuencia percibida en A, f_2, es mayor que la emitida. El punto A emite con esta frecuencia percibida, f_2, y como el avión se acerca con velocidad v_2, en el detector situado en el avión se percibe una frecuencia, f_2^*, mayor que f_2.

Al mezclar estas dos señales de frecuencias distintas, f_1^* y f_2^*, las cuales son función de la velocidad del avión, se obtiene una *pulsación* de frecuencia $f_P = f_2^* - f_1^* = h(f_0, v, c)$, así que midiendo la frecuencia de la pulsación y conocida la frecuencia de emisión y la velocidad de las ondas electromagnéticas se puede determinar la velocidad del avión.

NOTA MATEMÁTICA

Si las direcciones de emisión hacia adelante y hacia atrás son tales que $v_1 = v_2 = v\cos\alpha$, siendo *"α"* el ángulo formado entre la dirección del movimiento del avión y la dirección avión–A, entonces:

$$f_1 = f_0 \frac{\sqrt{1-\left(\frac{v\cos\alpha}{c}\right)^2}}{1+\frac{v\cos\alpha}{c}}; \qquad f_1^* = f_1 \frac{\sqrt{1-\left(\frac{v\cos\alpha}{c}\right)^2}}{1+\frac{v\cos\alpha}{c}} = f_0 \frac{1-\left(\frac{v\cos\alpha}{c}\right)}{1+\left(\frac{v\cos\alpha}{c}\right)};$$

$$f_2 = f_0 \frac{\sqrt{1-\left(\frac{v\cos\alpha}{c}\right)^2}}{1-\frac{v\cos\alpha}{c}}; \qquad f_2^* = f_2 \frac{\sqrt{1-\left(\frac{v\cos\alpha}{c}\right)^2}}{1-\frac{v\cos\alpha}{c}} = f_0 \frac{1+\left(\frac{v\cos\alpha}{c}\right)}{1-\left(\frac{v\cos\alpha}{c}\right)};$$

$$\boxed{f_P = f_0 \frac{4\frac{v\cos\alpha}{c}}{1-\left(\frac{v\cos\alpha}{c}\right)^2}}$$

C.3.- Una onda plana incide sobre una superficie plana, formando un ángulo de 30º. Si el ángulo de refracción (transmisión) es de 45º justifique:

a) cómo varían la frecuencia y la longitud de onda de las ondas transmitida y reflejada.

b) ¿Existirá algún ángulo de incidencia a partir del cual ya no exista onda transmitida?. En caso afirmativo ¿cuánto valdría?

SOLUCIÓN

Cuando una onda plana se propaga por un medio e incide sobre la superficie de separación que le separa de un segundo medio, los puntos de esta superficie comienzan a vibrar con la misma frecuencia (vibración forzada), dando lugar a una onda plana en el primer medio —onda reflejada— y a otra onda en el segundo medio —onda transmitida— verificándose la ley de la reflexión y la ley de la refracción. Por tanto:

a.- las ondas transmitidas y reflejadas son de la misma frecuencia que la onda incidente, *f*. Como las velocidades de las ondas dependen de los medios, entonces las longitudes de onda de la ondas reflejada y transmitida serán diferentes; así si el medio inicial está caracterizado por un índice de refracción (velocidad), n_1 (v_1), y el segundo medio por un índice de refracción (velocidad), n_2 (v_2), entonces:

$$f = \frac{v_1}{\lambda_1} = \frac{v_2}{\lambda_2} = \frac{c}{n_1\lambda_1} = \frac{c}{n_2\lambda_2} \qquad [1]$$

y de los datos del problema

$$n_1 \,\text{sen}\,30 = n_2 \,\text{sen}\,45 \quad \Rightarrow \quad \frac{n_1}{n_2} = \frac{\text{sen}\,45}{\text{sen}\,30} = \sqrt{2} \qquad [2]$$

Como la onda reflejada avanza en el mismo medio que la incidente, la velocidad no cambia y en consecuencia su longitud de onda es igual a la de la onda incidente, λ_1; en cambio la longitud de onda de la transmitida es diferente al moverse a una velocidad distinta, y tiene por valor $\lambda_2 = \frac{n_1}{n_2}\lambda_1 > \lambda_1$ teniendo en cuenta la expresión [2].

b.- De [2] se verifica que $n_1 > n_2$, y por tanto el seno del ángulo de transmisión, a medida que aumente el ángulo de incidencia, llegaría a valer más que 1, lo que es imposible y por tanto no existiría onda transmitida. El valor de este ángulo, θ_L, se determina por la condición de salida rasante, es decir $\theta_T = 90^0$; así, teniendo en cuenta [2]:

$$\boxed{n_1 \,\text{sen}\,\theta_L = n_2 \,\text{sen}\,90 \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\,\theta_L = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta_L = 45^0}$$

C.4.- Se observa que en un circuito RLC, con L=2 mH y C=5 μF, la frecuencia de resonancia es 0.75 veces la frecuencia natural de oscilación. Determine la resistencia R del circuito y la fase de la tensión aplicada respecto de la intensidad de la corriente en resonancia.

SOLUCIÓN

Se dispone de un circuito R-L-C conectado a un generador, por tanto la respuesta del circuito depende de la frecuencia del generador. De los datos del ejercicio sabemos:

$$\omega_0 = (LC)^{-1/2} = (2\times10^{-3}\times5\cdot10^{-6})^{-1/2} = 10^4 \text{ rad/s}$$

$$\omega_R = 0{,}75\omega_0 = 7500 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \sqrt{0{,}5\times(1-0{,}75^2)}\cdot10^4 = 4677{,}1 \text{ s}^{-1}$$

y teniendo en cuenta la definición del coeficiente de amortiguamiento:

$$\boxed{2\gamma = R/L \quad \Rightarrow \quad R = 2\gamma L = 2 \times 4677{,}1 \times 2 \cdot 10^{-3} = 18{,}7\ \Omega}$$

Si al circuito se le aplica una fuente de tensión de valor

$$V(t) = V_0 \cos(\omega t) \qquad [1]$$

el circuito responde con una carga en el condensador de valor

$$q(t) = A(\omega)\cos\left(\omega t - \delta(\omega)\right) \qquad [2]$$

y en consecuencia la corriente a través del circuito es:

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -\omega A(\omega)\,\mathrm{sen}\,(\omega t - \delta(\omega)) = \omega A(\omega)\cos(\omega t - \delta(\omega) + \pi/2) \qquad [3]$$

Para hallar la fase de la tensión aplicada respecto la intensidad en el circuito, sólo tenemos que calcular la fase δ en resonancia,

$$\delta(\omega) = arc\ \mathrm{tg}\left[\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right] \quad \Rightarrow \quad \delta(\omega_R) = arc\ \mathrm{tg}\left[\frac{2\gamma\omega_R}{\omega_0^2 - \omega_R^2}\right] = arc\ \mathrm{tg}\left[\frac{\omega_R}{\gamma}\right] = arc\ \mathrm{tg}\left[\frac{7500}{4677{,}1}\right] = 1{,}01\ \mathrm{rad}$$

por tanto, de [3]:

$$i(t) = \omega A(\omega)\cos(\omega t - \delta(\omega) + \pi/2) = \omega A(\omega)\cos(\omega t + 0{,}56) \qquad [4]$$

Comparando [1] y [4] se deduce que ***la tensión está retrasada respecto de la intensidad en 0,56 rad*.**