Universidad de Alcalá de Henares
Departamento de Física
Examen de Ampliación de Física (Junio 2003)

P.1.- Un circuito RLC es alimentado por un receptor que convierte en señal eléctrica una onda de sonido, plana y armónica, que incide sobre él. La carga en el condensador en régimen estacionario viene dada por la expresión

$$Q(t) = 20\cos\left(6.8\pi \times 10^3 t - 0.15\pi\right) \tag{1}$$

con $Q(t)$ en nC y t en s, y si R=95 Ω, L=5 mH, C=0.3 μF y la velocidad de fase del sonido es 340 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, determine:

1. Cuál era el período de las oscilaciones amortiguadas y el tiempo que tardaron en reducirse a un 10% de su amplitud original.
2. La frecuencia, la longitud de onda y el número de ondas de la onda acústica.
3. ¿Con qué velocidad y en qué sentido debe moverse el conjunto receptor-circuito a lo largo de la dirección de propagación de la onda acústica para que las oscilaciones de carga en el condensador inducidas por la señal del receptor tengan la máxima amplitud?

Valoración máxima: 2 puntos

SOLUCIÓN

La acción de la onda incidente sobre el receptor da lugar a una oscilación en el circuito RLC, la cual consta de dos componentes: una oscilación transitoria –superposición de la oscilación incidente más la oscilación amortiguada del sistema oscilante–, más una oscilación forzada estacionaria.

La ecuación 1 es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC}Q = \varphi_0 \cos(\omega t)$$

que comparada con la ecuación diferencial

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + 2\gamma\frac{d\psi}{dt} + \omega_0^2\psi = F_0 \cos(\omega t)$$

nos dice que:

$$\gamma = \frac{R}{2L}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

1. *Periodo de la oscilación amortiguada:*
   La frecuencia de la oscilación amortiguada es $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, y el periodo es $T_a = 2\pi/\omega_a$. Con los datos del problema,

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{4L^2}}} = 0.26\,\mathrm{ms}}$$

2. *Tiempo para que la amplitud se reduzca al 10% de su valor original:*
   En el transitorio la amplitud decrece según

$$A = A_0 e^{-\gamma t} = A_0 e^{-\frac{R}{2L} t} \tag{2}$$

   Cuando la amplitud se ha reducido al 10% de su valor original, $A/A_0 = 0.10$; tomando logaritmos neperianos en 2

$$-\frac{R}{2L} t = \ln\left(\frac{A}{A_0}\right)$$

   y despejando

$$\boxed{t = -\frac{2L}{R} \ln\left(\frac{A}{A_0}\right) = 0.24\,\mathrm{ms}}$$

3. *Frecuencia de la onda acústica:*
   Coincide con la frecuencia de oscilación forzada. De la ecuación 1 tenemos que $\omega = 6.8\pi \times 10^3\,\mathrm{rad/s}$ y la frecuencia es $f = \omega/(2\pi)$:

$$\boxed{f = \frac{\omega}{2\pi} = 3.4\,\mathrm{kHz}}$$

   Longitud de onda de la onda acústica:
   Si $c = 340\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ es la velocidad de fase, entonces $\lambda = c/f = 2\pi c/\omega$

$$\boxed{\lambda = 0.1\,\mathrm{m}}$$

   Número de ondas:
   El número de ondas viene dado por $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$

$$\boxed{k = 20\pi\,\mathrm{m}^{-1}}$$

4. En la oscilación forzada la amplitud es función de la frecuencia aplicada. La máxima amplitud corresponde a la frecuencia de resonancia ω_r (f_r); En el enunciado se nos dice que esto se logra moviendo el receptor en la dirección de propagación de la onda, es decir acercándose o alejándose del foco emisor de ondas (efecto Doppler). Para determinar si se acercan o alejan calcularemos la frecuencia de resonancia, y si es mayor que la frecuencia de la onda se acercan, y si es menor se alejan.
   La frecuencia de resonancia es

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} = 22.1 \times 10^3\,\mathrm{rad/s}$$

   que es mayor que ω por lo que el receptor se mueve en el sentido opuesto al de propagación:

$$\omega_r = \omega \frac{c+v}{c}$$

   de donde se obtiene

$$\boxed{v = 11.2\,\mathrm{m/s}}$$

P.2.- Dos emisores puntuales de ondas electromagnéticas (velocidad de fase en el vacío $c = 3 \times 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ se disponen según se indica en la figura. Ambas fuentes emiten coherentemente con desfase nulo, a una frecuencia de 300 GHz y con la misma potencia.

1. Determine el carácter de la interferencia en el punto O.
2. Si el conjunto está en un medio con índice de refracción n = 1.5, determine el carácter de la interferencia en O.
3. Si la potencia de emisión es 4 μW, determine la intensidad en O en cada caso.

Valoración máxima: 2 puntos

SOLUCIÓN

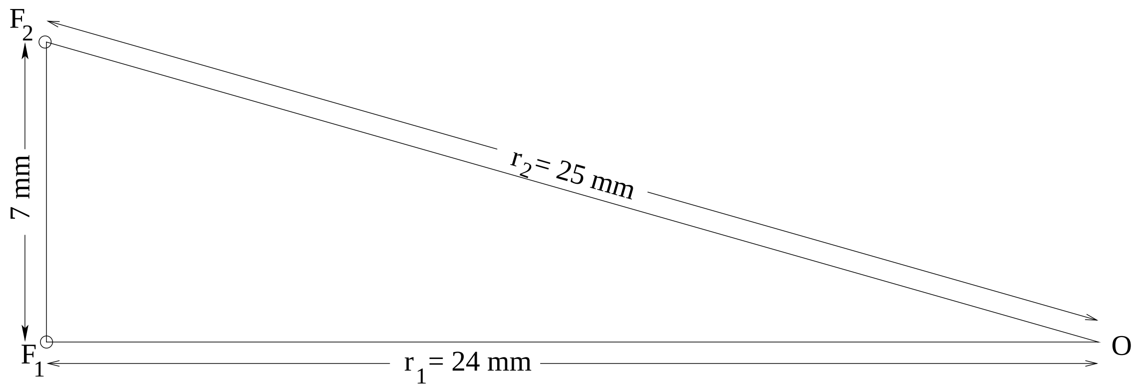

Figure 1:

1. *Carácter de la interferencia en O:*
   Dado que las oscilaciones en los focos emisores son de la misma frrecuencia y están en fase, en el punto O de la figura 1 la oscilación es la superposición de las dos ondas $\varphi_1(r,t) = A_1 \cos(\omega t - kr_1)$ y $\varphi_2(r,t) = A_2 \cos(\omega t - kr_2)$:
   $$\varphi(r,t) = \varphi_1(r_1,t) + \varphi(r_2,t)$$
   y la intensidad es
   $$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta \tag{3}$$
   siendo δ la diferencia de fase entre ambas señales:
   $$\delta = k\,(r_2 - r_1) = \frac{2\pi}{\lambda}\,(r_2 - r_1) = \frac{2\pi f}{c}\,(r_2 - r_1)$$
   En la figura vemos que por aplicación del teorema de Pitágoras $r_2 = 25\,\mathrm{mm}$ por lo que
   $$\delta = \frac{2\pi \times 3 \times 10^{11}}{3 \times 10^{11}} = 2\pi$$
   que hace máximo el valor del coseno $(+1)$ y la ***interferencia es constructiva***.

2. *Carácter de la interferencia en O si n=1.5:*
   En este caso la velocidad de propagación es
   $$c' = \frac{c}{n} = \frac{3 \times 10^{11}}{1.5}\,\mathrm{mm/s}$$

por lo que la longitud de onda es

$$\lambda' = \frac{c'}{f} = \frac{3\times 10^{11}}{1.5\times 3\times 10^{11}} = \frac{2}{3}\,\mathrm{mm}$$

y la diferencia de fase es

$$\delta = k'\,(r_2 - r_1) = \frac{2\pi}{\lambda'}\,(r_2 - r_1) = 3\pi$$

que hace mínimo al coseno (-1) y la ***interferencia es destructiva***.

3. Las intensidades que llegan al punto O son:

$$I_1 = \frac{P}{4\pi r_1^2}$$

y

$$I_2 = \frac{P}{4\pi r_2^2}$$

Aplicando la ecuación 3 para la intensidad tenemos:

a) $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} = \left(\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{P}{4\pi r_1^2}} + \sqrt{\frac{P}{4\pi r_2^2}}\right)^2 = 2\,\mathrm{mW/m^2}$

b) $I = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} = \left(\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{P}{4\pi r_1^2}} - \sqrt{\frac{P}{4\pi r_2^2}}\right)^2 = 0.9\,\mu\mathrm{W/m^2}$

T.1.- Un oscilador armónico se describe mediante una función coseno con fase inicial nula. Determine, en el intervalo de un periodo, cuándo los siguientes pares de magnitudes tienen el mismo sentido:

1. Desplazamiento y velocidad
2. Velocidad y aceleración
3. Desplazamiento y aceleración

Valoración máxima: 1.5 puntos

SOLUCIÓN

En la figura 2 se muestran los fasores representativos de la elongación (desplazamiento), x, de la velocidad, v, y aceleración, a, en dos instantes distintos. Cada uno de los fasores va adelantado $\pi/2$ rad con respecto al anterior, por lo que nunca se encontrarán dos fasores en el mismo cuadrante. Este conjunto de fasores gira con velocidad angular ω, y se mantiene el ángulo entre ellos. Sus proyecciones sobre el eje X deben ser del mismo signo para cumplir las codiciones del enunciado (función coseno).

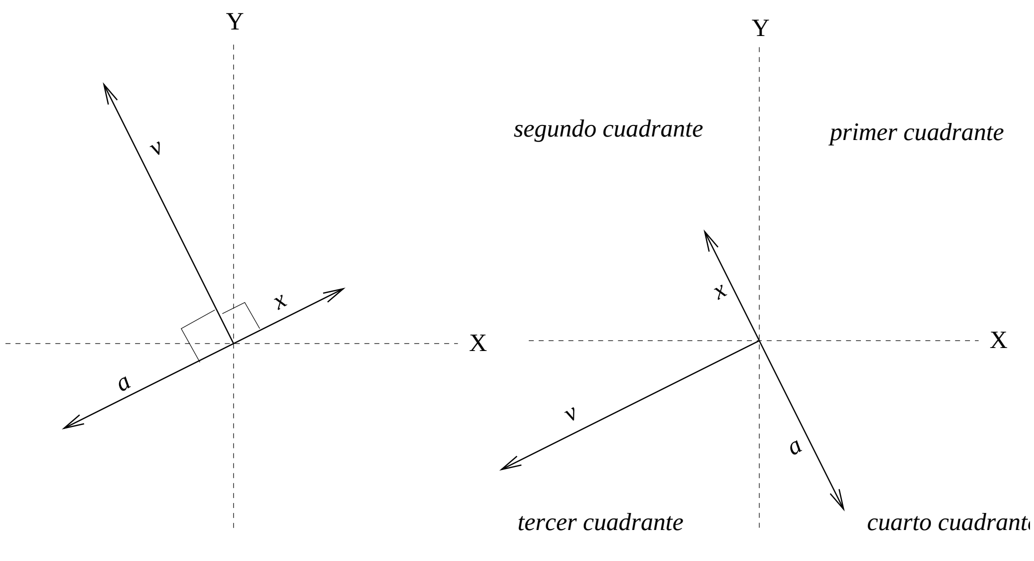

Figure 2:

En la figura 2-izquierda vemos que los fasores velocidad y aceleración tienen sus proyecciones sobre X del mismo signo, situación que se repite cuando el fasor velocidad esté en el cuarto cuadrante. Esto ocurre mientras la elongación se encuentra en el primer o tercer cuartos de periodo.
En la figura 2-derecha vemos que los fasores elongación y velocidad tienen sus proyecciones X del mismo signo, situación que se repite cuando el fasor elongación esté en el cuarto cuadrante. Por tanto

1. El desplazamiento y la velocidad son del mismo signo en los 2º y 4º cuartos de periodo.
2. La velocidad y la aceleración son del mismo sentido en los 1º y 3º cuartos de periodo.
3. En ningún caso la elongación y la aceleración son del mismo signo por ser fasores de sentidos opuestos (esto mismo se puede deducir de la relación $a = -\omega^2 x$).

T.2.- La velocidad de propagación de las ondas transversales en una cuerda de 1 m de longitud, con sus extremos ($x = 0$ m y $x = 1$ m) fijos, es 300 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

1. Determine, justificando la respuesta, cuáles de las siguientes expresiones, representan ondas estacionarias en dicha cuerda.
2. En los casos afirmativos, indique qué armónicos se hallan presentes.

   a) $y(x,t) = 0.01 \sin(3\pi x)\cos(900\pi t)$
   b) $y(x,t) = 0.01 \sin(5\pi x)\cos(1600\pi t)$
   c) $y(x,t) = 0.01 \sin(\pi x - 300\pi t)$
   d) $y(x,t) = 0.01 \sin(\pi x)\sin(300\pi t) + 0.002 \sin(6\pi x)\cos(1800\pi t)$
   e) $y(x,t) = 0.01 \cos(2\pi x)\sin(600\pi t)$

Valoración máxima: 1.5 puntos

SOLUCIÓN

Para que las ondas en la cuerda sean ondas estacionarias con los extremos fijos se debe cumplir:

- $y(0,t) = y(1,t) = 0$ como consecuencia de tener los extremos fijos.
- en la función $y(x,t)$ no debe aparecer el término de propagación; es decir las fases no pueden ser del tipo $\omega t \pm kx$.
- las frecuencias ω tienen que ser múltiplos enteros de la frecuencia fundamental ω_0.

A partir de la primera condición vemos que la expresión (e) no representa la onda estacionaria del enunciado, pues tanto para $x = 0$ como para $x = 1\,\mathrm{m}$ el coseno vale $+1$, dando un valor de $y(0,t) = y(1,t) \neq 0$.

A partir de la segunda condición vemos que la expresión (c) tampoco es válida, pues la fase contiene el término de propagación.

Para ver cuales de las restantes expresiones se ajustan al enunciado, debemos calcular la frecuencia del modo fundamental. En el modo fundamental entre los dos extremos (ceros de amplitud) hay un solo máximo; es decir que la longitud de onda $\lambda_o = 2l$ siendo l la longitud de la cuerda. La frecuencia del modo fundamental,

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi \frac{c}{\lambda_0} = \frac{\pi c}{l} = 300\pi\,\mathrm{rad/s}$$

En la expresión (b) la frecuencia 1600π no es múltiplo entero de 300π y en consecuencia tampoco es válida. En conclusión

1. Las expresiones (a) y (d) representan ondas estacionarias en la cuerda.
2. La expresion (a) contiene el 2º armónico ($= n - 1 = (900\pi)/(300\pi) - 1 = 2$).
   La expresión (d) contiene el modo fundamental (300π) y el 5º armónico ($= n - 1 = (1800\pi/(300\pi) - 1 = 5$).

T.3.- En un determinado día de invierno, la capa más baja de la atmósfera, de espesor 200 m, tiene un índice de refracción de $n_1 = 1.2$, y por encima de esa altura el índice es $n_2 = 1$. Un observador en el suelo divisa una avioneta que viaja hacia la izquierda a lo largo del eje X, cuando mira con un ángulo de 30^0 hacia la derecha respecto de su vertical. Un minuto después, el observador ve la avioneta sobre él. Si efectúa su vuelo a velocidad constante y a una altura fija de 1000 m,

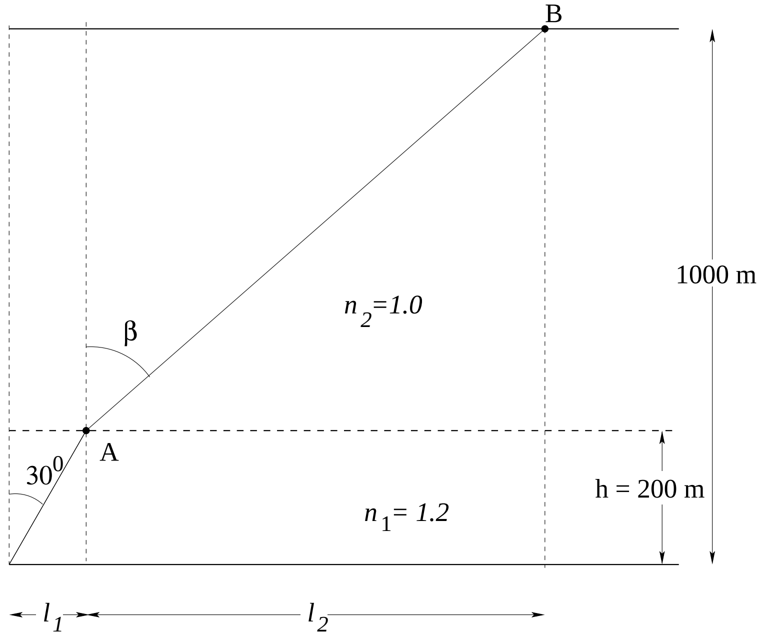

Figure 3:

1. ¿Cuál es la velocidad de la avioneta?
2. Si la avioneta emite un tono de frecuencia f_0, ¿cómo se modifica la frecuencia percibida por el observador según la avioneta se acerque al observador, esté sobre su vertical o se aleje del observador?

Valoración máxima: 1.5 puntos

SOLUCIÓN

1. Cuando la avioneta se encuentra en B (figura 3) el observador la ve bajo un ángulo con la vertical de 30^0. El rayo procedente de B corta a la superficie de separación entre los dos medio en el punto A. Aplicamos la ley de la refracción en el punto A

$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta$$

a partir de la cual podemos calcular β:

$$\sin\beta = \frac{n_1}{n_2}\sin\alpha\,; \quad \sin\beta = \frac{1.2}{1}\sin 30 = 0.6 \quad \beta = 36.9^0$$

Hasta llegar a la vertical recorre una distancia $l = l_1 + l_2 = vt = 200\tan 30 + 800\tan 36,9$ de donde se puede despejar v:

$$v = \frac{200\tan 30 + 800\tan 36,9}{60} = 12\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

2. Desde el punto B hasta la vertical, la avioneta se acerca al observador (la distancia decrece con el tiempo), por lo que la frecuencia percibida es

$$f' = f_0 \frac{c}{c - v^*}$$

en donde v^* es la componente de la velocidad de la avioneta en la dirección al observador. Como el denominador es menor que el numerador la fracción es mayor que la unidad y la frecuencia $f' > f_0$. Esta frecuencia f' va disminuyendo hasta que al pasar por la vertical se iguala a f_0 ($v^* = 0$). A partir de este punto, la avioneta se aleja del observador por lo que

$$f' = f_0 \frac{c}{c + v}$$

y es $f' < f_0$.

T4.- Una onda unidimensional se representa por la función

$$y(x,t) = A_0 e^{-bx} \sin(kx - \omega t)$$

con x e y en metros y t en segundos.

1. Razone si los puntos del medio realizan oscilaciones amortiguadas u oscilaciones armónicas.
2. Razone cómo varía la energía transportada por la onda en función de x.
3. Si $b = 0.1\,\mathrm{m}^{-1}$ calcule la diferencia de niveles de intensidad entre los puntos $x = 0$ m y $x = 20$ m.

Valoración máxima: 1.5 puntos

SOLUCIÓN

1. Cada valor de x representa un punto del medio. Para cada valor de x hay una oscilación de frecuencia ω. Si consideramos un valor de $x = x_0$ determinado la función oscila según $A_0 e^{-bx_0} \sin(kx_0 - \omega t) = A(x_0) \sin(kx_0 - \omega t)$, lo que significa que la oscilación es armónica: ***todos los puntos del medio oscilan armónicamente,*** pero cada punto con una amplitud diferente.

2. La energía es proporcional al cuadrado de la amplitud. La amplitud decrece exponencialmente según $A = A_0 e^{-bx}$ por lo que

$$E \propto A^2 \propto \left(A_0 e^{-bx}\right)^2 \propto A_0^2 e^{-2bx}$$

3. El nivel de intensidad en el punto $x = 0$ es

$$\mathrm{NI}(x=0) = 10 \log \frac{I(0)}{I_{ref}}$$

y en $x = 20$

$$\mathrm{NI}(x=20) = 10 \log \frac{I(20)}{I_{ref}}$$

La variación de niveles es

$$\Delta\mathrm{NI} = 10 \log \frac{I(0)}{I_{ref}} - 10 \log \frac{I(20)}{I_{ref}} = 10 \log \frac{I(0)}{I(20)}$$

el valor $I(0) \propto A_0^2$ y el valor $I(20) \propto A_0^2 e^{-2\times 0.1\times 20} = A_0^2 e^{-4}$ por lo que

$$\boxed{\Delta\mathrm{NI} = 10 \log \frac{A_0^2}{A_0^2 e^{-4}} = 10 \log e^4 = 17.4\,\mathrm{dB}}$$