Universidad de Alcalá de Henares

Departamento de Física

Examen de *Ampliación de Física* (Septiembre 2004)

Universidad de Alcalá de Henares

Departamento de Física

Examen de *Ampliación de Física* (Septiembre 2004)

1.- Dos altavoces enfrentados y separados 100 m emiten en fase a 456 Hz y con una potencia de 0.5 W. La velocidad de las ondas es c=342 m/s. Un observador se sitúa en la línea que une los altavoces y a 70 m de uno de ellos:

1. Calcule la diferencia de fase, δ $(0 < \delta < 2\pi)$, con que llegan las ondas al punto donde se encuentra el observador.
2. ¿Qué intensidad detecta un receptor en ese punto?
3. Con qué velocidad debe dirigirse el observador hacia uno de ellos para recibir pulsaciones (batidos) de frecuencia 4 Hz.

Valoración máxima: 2 puntos.

Solución

Datos:

distancia entre altavoces: d = 100 m
distancia altavoz A–observador: d_1 =70 m
potencias de emisión: $P_A = P_B$ = 0.5 W
velocidad de las ondas: c = 342 m/s
emisión de altavoces: *oscilan en fase* y con frecuencia: f = 456 Hz.

1. La diferencia de fase, δ, con las que las ondas llegan al punto donde se sitúa el observador, O, es:

$$\delta = k(d_1 - d_2) = \omega(d_1 - d_2)/c = 2\pi\, 456 \cdot 40/342 = 320\pi/3$$

que reducido al primer giro da

$$\boxed{\delta = 2\pi/3 \text{ rad}}.$$

2. Las intensidades en O, debidas a cada uno de los altavoces, ya que hay emisión esférica, son respectivamente

$$I_1(O) = P_1/\left(4\pi d_1^2\right) = 0.5/\left(4\pi 70^2\right) = 8{,}12 \ \mu\text{W/m}^2;$$
$$I_2(O) = P_2/\left(4\pi d_2^2\right) = 0.5/\left(4\pi (100-70)^2\right) = 44{,}2 \ \mu\text{W/m}^2,$$

y en consecuencia la intensidad en O será

$$I(O) = I_1(O) + I_2(O) + 2\sqrt{I_1(O) \cdot I_2(O)}\cos\delta$$

y sustituyendo resulta

$$\boxed{I(O) = 8{,}12 + 44{,}2 + 2\sqrt{8{,}12 \cdot 44{,}2}\cos(2\pi/3) = 33{,}4 \ \mu\text{W/m}^2}$$

Recibe pulsaciones si las frecuencias percibidas debidas a las dos ondas sonoras de los altavoces son distintas, y esto realmente sucede ya que si suponemos que lleva velocidad v, acercándose al segundo altavoz se aleja del primero, y percibirá diferente frecuencia tanto del primero como del segundo altavoz. Así tendremos que la frecuencia percibida debida al primer altavoz, f_1 es

$$f_1 = f(c - v)/c$$

y la debida al segundo, f_2 es

$$f_2 = f(c + v)/c$$

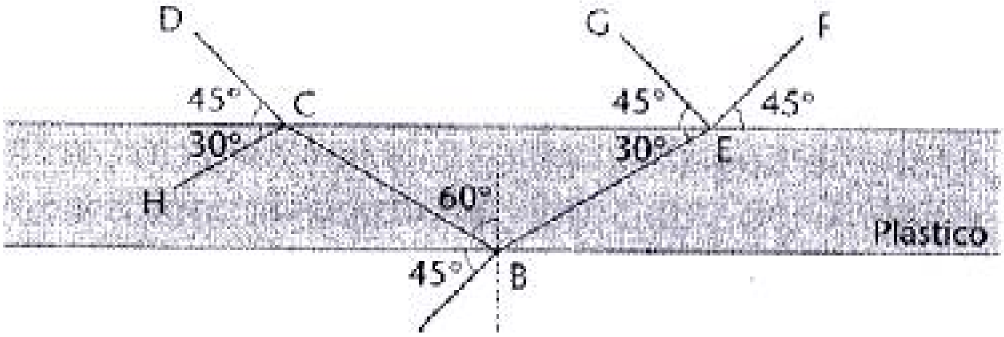
La frecuencia del batido, $f_B = f_2 - f_1$ es un dato y podemos determinar la velocidad del observador; sustituyendo tenemos

$$f_B = 4 = 2v\,f\,/\,c \;\Rightarrow\; v = 2c\,/\,f = 1{,}5 \text{ m/s}$$

2.- Un rayo de luz incide sobre una lámina transparente de caras planas y paralelas. En la figura se representan, además del rayo incidente, todos los rayos que resultan de las sucesivas reflexiones y refracciones. La lámina tiene un índice de refracción n_L, mientras que el del medio en el cual se encuentra es n_M. Determine:

1. ¿Cuál es el rayo incidente?
2. Indique el sentido de la propagación en cada uno de los rayos representados.
3. ¿Cuánto vale el índice de refracción relativo del material de la lámina respecto al del medio, n_L / n_M?

Valoración máxima: 2 puntos.



Solución

1. Al llegar un rayo a la superficie de separación de dos medios de distinta refringencia, se producen dos rayos: el rayo reflejado y el refractado. Las leyes de la reflexión nos dicen que el ángulo de incidencia y el de reflexión son iguales, y la relación entre el ángulo de incidencia y el de refracción es
$$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2$$
por lo que el ángulo refractado tiene que ser menor que $\pi/2$.
En los puntos B y C no se cumple la ley de la refracción (cualquiera que sea el rayo incidente su ángulo refractado es mayor que $\pi/2$), por lo que solo nos queda como solución posible de incidencia el punto E; pero el rayo procedente de G está en las mismas circunstancias, por lo que la única posibilidad es que el rayo incidente proceda de F
El rayo incidente es el que procede de F

2. Una vez determinado el rayo incidente la marcha de los sucesivos rayos queda definida totalmente; así al llegar F al punto E aparece el rayo reflejado, EG, y el rayo transmitido, EB; éste en el punto B sufre una transmisión dando el rayo BA y una nueva reflexión dando el rayo BC; éste a su vez al llegar a C sufre una reflexión dando lugar al rayo CH y una última transmisión representada por el rayo CD.

3. Aplicando la ley de Snell de la refacción en el punto E y teniendo en cuenta los datos de la figura como son el ángulo de incidencia

$$\hat{\theta}_i = 90 - 45 = 45^o$$

y el ángulo de transmisión

$$\hat{\theta}_t = 90 - 30 = 60^o$$

resulta que

$$\boxed{\frac{n_L}{n_M} = \frac{sen\,\hat{\theta}_i}{sen\,\hat{\theta}_t} = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{3}/2} = 0.82}$$

3.- La función de una onda estacionaria es (en unidades del S.I.):

y(x,t)=0.08 cos(πx/12) sen (4πt)

Los límites del medio donde se ha generado esta onda son x = 0 m y x = 18 m. Calcule:

1. Las posiciones de los nodos y los vientres
2. La velocidad de la partícula situada en el punto x=2 m y en el instante t= 5s.

Valoración máxima: 1.5 puntos.

Solución

1. Comparando la parte espacial, $A\cos(kx)$, de la onda estacionaria genérica, cuya función está dada por $y(x,t) = A\cos(kx)\sin(\omega t)$, con la parte espacial de la función de onda estacionaria del problema, podemos determinar la longitud de onda λ,.En efecto, resulta que

$$k\,x = \pi\,x/12 \Rightarrow 2\pi/\lambda = \pi/12 \Rightarrow \lambda = 24 \text{ m}.$$

El primer vientre o antinodo, dentro del rango espacial, se determina haciendo máxima la amplitud

$$\cos(\pi\,x/12) = 1 \Rightarrow \pi\,x/12 = 0 \Rightarrow x = 0$$

y como los vientres están separados λ/2, tendremos determinados todos. Debido a que el espacio unidimensional está comprendido entre 0 ≤ *x* ≤ 18 los únicos antinodos aparecen en las posiciones

$$\boxed{AN = \{0,\, 12\} \text{ m}}$$

y teniendo en cuenta que la separación entre nodo y antinodo consecutivos es λ/4 también quedan determinados todos los nodos que surgen en las posiciones

$$\boxed{N = \{6,\, 18\} \text{ m}}.$$

2. La velocidad de vibración es

$$v(x,t) = \frac{\partial\, y(x,t)}{\partial\, t} = 0.08 \cdot 4\pi\, \cos(\pi\,x/12)\cos(4\pi\,t)$$

y por tanto

$$\boxed{v(2,5) = 0.32\,\pi\cos(\pi/6)\cos(20\,\pi) = 0{,}87 \text{ m/s}}.$$

4.- Un foco puntual emite con potencia P ondas esféricas.

1. Determine la intensidad de la onda a una distancia d
2. Determine la diferencia de niveles de intensidad entre el punto anterior y otro situado a una distancia 3d

Si estamos muy lejos del foco (d>>λ), la onda puede considerarse plana, de modo que si la intensidad en d es I_0,

3. ¿Cuánto vale la intensidad en otro punto situado a una distancia 3d?
4. Hallar la diferencia entre los niveles de intensidad en los puntos a distancias d y 3d.

Valoración máxima: 1.5 puntos.

Solución

1. La potencia se distribuye por igual en todas las direcciones del medio isótropo y homogéneo por tanto en cualquier punto situado a una distancia *d* tendremos el mismo valor de la intensidad, y que es

$$I(d) = P/SE_{R=d} = P/(4\pi d^2) \ .$$

2. El nivel de intensidad en un punto se define como $NI = 10\log\left(I/I_{REF}\right)$, donde *I* es la intensidad en dicho punto e I_{REF} es un valor de referencia. La intensidad a una distancia *3d* será

$$I(3d) = P/SE_{R=3d} = P/(4\pi \cdot 9d^2)$$

La diferencia entre los niveles en *d* y *3d* es

$$\Delta NI = NI(d) - NI(3d) = 10\left[\log\left(I(d)/I_{REF}\right) - \log\left(I(3d)/I_{REF}\right)\right]$$

con lo que

$$\boxed{\Delta NI = 10\log\left(I(d)/I(3d)\right) = 10\log 9 = 9{,}5 \quad \text{dB}}.$$

3. Cuando estamos muy alejados del foco emisor respecto de la longitud de onda podemos aproximar localmente un trozo de superficie esférica por un plano y en primera aproximación tendremos onda plana que es lo que plantea el ejercicio. En onda plana la amplitud y por tanto la intensidad es independiente de la distancia, en consecuencia la intensidad a la distancia *3d* es

$$\boxed{I(3d) = I(d) = I_0}.$$

4. Llevando los valores del apartado **3** a la expresión de la diferencia de niveles dada en el apartado **2** resulta

$$\boxed{\Delta NI = 10\log\left(I(3d)/I(d)\right) = 10\log(1) = 0 \quad \text{dB}}.$$

5.- A una masa *m* sujeta a un muelle de constante elástica *k* se le aplica una fuerza dada por

$$F(t) = F_0\cos(\omega t)$$

donde $\omega = (k/m)^{1/2}$. El sistema se encuentra en un medio con una constante de amortiguamiento γ. En el estado estacionario, señalar cuáles de las siguientes variables: desplazamiento, velocidad, aceleración y fuerza aplicada, se encuentran:

1. En fase.
2. En oposición de fase.
3. En cuadratura.

Valoración máxima: 1.5 puntos.

Solución

Tenemos un oscilador forzado y nos preguntan por el régimen estacionario. Sea $x(t)$ la variable representativa del estado del oscilador, entonces

$$x(t) = A(\omega)\cos(\omega t - \delta(\omega))$$

donde ω es la frecuencia de la fuerza externa y los valores de amplitud y fase toman los siguientes valores:

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\left[\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2 + (2\gamma\omega)^2\right]^{1/2}} \qquad \text{y} \qquad \delta(\omega) = \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{2\gamma\omega}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\right]$$

en las que ω_0 es la frecuencia natural de oscilación, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Como la frecuencia de la fuerza externa es igual a la frecuencia de oscilación anterior, los valores de la amplitud y la fase resultan ser:

$$A(\omega_0) = \frac{F_0/m}{2\gamma\omega} = A_0 \qquad \text{y} \qquad \delta(\omega_0) = \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{2\gamma\omega}{\left(\omega_0^2-\omega_0^2\right)}\right] = \frac{\pi}{2}$$

y por tanto el desplazamiento del oscilador, la velocidad y la aceleración y la fuerza externa vienen dados por:

$$\begin{cases} x(t) = A_0\cos(\omega t - \pi/2) \\ v(t) = -A_0\omega\, sen(\omega t - \pi/2) = A_0\,\omega\cos(\omega t) \\ a(t) = -A_0\,\omega^2\cos(\omega t - \pi/2) \\ F = F_0\cos(\omega t) \end{cases}$$

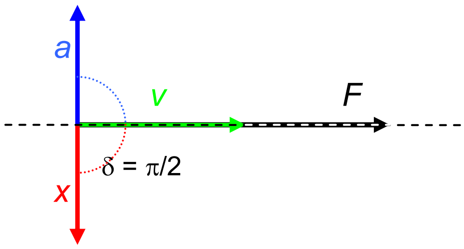
De la expresión anterior se infiere que:

1. Están en fase la fuerza y la velocidad (resonancia en energía).
2. Están en oposición de fase el desplazamiento y la aceleración.
3. Están en cuadratura: la velocidad y aceleración; velocidad y desplazamiento; fuerza y aceleración; y fuerza y desplazamiento.

Al mismo resultado se llega de la siguiente manera. Como la frecuencia aplicada coincide con la frecuencia propia del sistema, la fase $\delta(\omega)$ es $\pi/2$ rad ($\omega_0^2 - \omega^2 = 0$), por lo que la fuerza va adelantada $\pi/2$ con respecto al desplazamiento. En este caso el diagrama fasorial es el mostrado en la figura, de la cual se deduce que:

1. Están en fase la fuerza y la velocidad (resonancia en energía).

2. Están en oposición de fase el desplazamiento y la aceleración.
3. Están en cuadratura: velocidad y aceleración; velocidad y desplazamiento; fuerza y aceleración; y fuerza y desplazamiento.



6.- En un medio unidimensional se propaga una onda, de modo que en el punto x_1 se produce una oscilación $y(x_1,t)=A\cos(\omega t)$. Sabiendo que $x_2=x_1+2$ metros es el punto más próximo que vibra en fase con el anterior, determine:

1. La longitud de onda

2. Sabiendo que la frecuencia es de 100 Hz, y que la velocidad de vibración máxima es $v_{máx}=2\pi$ m/s, determine la amplitud de la vibración.

3. Escriba la función de ondas.

Valoración máxima: 1.5 puntos.

Solución

1. Como los puntos que oscilan en fase difieren en múltiplos de la longitud de onda; del enunciado se infiere que la longitud de onda es

a. **=2 m**,.

2. Derivando respecto del tiempo la función de ondas general podemos determinar la velocidad de vibración

$$v(x,t) = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = -A\,\omega\, sen(\omega t - k\,x + \delta)$$

la cual es máxima cuando el seno sea igual a –*1*. En consecuencia

$$v_{\max} = A\,\omega = 2A\,\pi\, f$$

y de los datos del ejercicio

$$\boxed{v_{\max} = 2\pi = 2A\pi 100 \;\Rightarrow\; A = 10^{-2}\ \text{m}}.$$

3. La función de onda puede escribirse como:

$$\boxed{y(x,t) = 10^{-2}\cos(200\pi t - \pi x + \delta)}$$
