Universidad de Alcalá de Henares

Departamento de Física

Examen de *Ampliación de Física* (Junio 2004)

1.- Las estaciones de radio de FM tienen frecuencias portadoras que están separadas 0.2 MHz; por tanto, la anchura de resonancia de los circuitos receptores debe ser mucho menor que dicha separación para que no se reciban las estaciones adyacentes. Si se sintoniza una emisora que emite con una portadora f_0 = 100.1 MHz:

a) Determine el ancho de banda del circuito de sintonía si su factor de calidad es 10 010.

b) Calcule la autoinducción del circuito si su resistencia es R=0.1Ω.

c) Halle la capacidad del circuito para lograr la sintonización de la emisora.

d) Si la amplitud de tensión de la onda en la antena es de V_0, ¿cuál será la corriente máxima en el circuito?

Solución

a) El factor de calidad Q se relaciona con la frecuencia de resonancia f_0, que corresponde a la sintonizada por el circuito, y con el ancho de banda del mismo, Δf, según la expresión:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f}$$

$$\boxed{\Delta f = \frac{f_0}{Q} = \frac{100.1\times 10^6}{10010} = 0.01\,\text{MHz}}$$

b) Dado que conocemos la frecuencia de resonancia, el factor de calidad y la resistencia del circuito, podemos calcular la autoinducción L a partir de:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{\omega_0 L}{R}$$

$$\gamma = \frac{R}{2L}$$

$$\boxed{L = \frac{Q R}{\omega_0} = \frac{Q R}{2\pi f_0} = \frac{10010\times 0.1}{2\pi\times 100.1\times 10^6} = 1.6\ \mu\text{H}}$$

c) Conociendo la autoinducción y la frecuencia de resonancia, obtenemos la capacidad C con:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L C}}$$

$$\boxed{C = \frac{1}{\omega_0^2 L} = \frac{1}{(2\pi f_0)^2 L} = \frac{1}{4\pi^2\,(100.1\times 10^6)^2\ 1.6\times 10^{-6}} = 1.6\ \text{pF}}$$

d) La amplitud de la intensidad de corriente en el circuito viene dada, en función de la amplitud de carga y de la frecuencia de la tensión aplicada, por

$$I_0(\omega) = \omega Q_0(\omega) = \frac{\omega V_0}{L\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\gamma\omega)^2}}$$

y es máxima[1] para $\omega = \omega_0$, de modo que

---

[1] La frecuencia de resonancia es $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{2Q^2}} = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2\times 10\,010^2}} = \omega_0$

$$\boxed{I_{\text{máx}} = I_0(\omega_0) = \frac{V_0}{2\gamma L} = \frac{V_0}{R} = \frac{V_0}{0.1} = 10\,V_0 \text{ A}}$$

2.- Dos focos puntuales de ondas sonoras emiten en fase a una frecuencia de 1 kHz. La velocidad del sonido en el medio en que se encuentran es de 318 m/s. Colocados como se indica en la figura, dan lugar a una intensidad de 125 μW/m^2 en el receptor R.

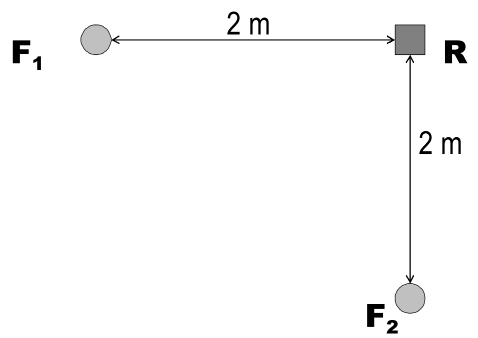
a) ¿Cuánto vale la potencia de emisión de cada foco, si es la misma para ambos?

b) ¿Qué espesor mínimo debería tener una placa de un material en el que la velocidad del sonido es de 265 m/s para que, interpuesta perpendicularmente al haz entre el foco F_1 y el receptor, dé lugar a interferencia destructiva en R?

c) En un cierto instante (t=0) y en el supuesto a), el receptor R comienza a moverse hacia la derecha con velocidad constante. Cuando se encuentra a una distancia de 2.3 m de F_1, se detectan en R pulsaciones con una frecuencia de batido de 10 Hz: ¿con qué velocidad se mueve el receptor?

d) ¿En qué dirección debería moverse R para que no se produjesen pulsaciones? ¿En qué punto se detectaría en R una señal con frecuencia de 1 kHz?

Solución



a) Dado que los focos emiten en fase y están situados a la misma distancia del receptor, dan lugar a interferencia constructiva en él, de modo que la intensidad detectada es:

$$I(R) = (\sqrt{I_1(R)} + \sqrt{I_2(R)})^2 = 4\,\frac{P}{4\pi\,d^2}$$

donde se ha considerado el hecho de que ambos focos emiten con una misma potencia P y están situados a la misma distancia d del receptor. La potencia de cada foco, por lo tanto, vale

$$\boxed{P = \pi d^2\, I(R) = \pi\times 2^2 \times 125\times 10^{-6} = 1.57 \text{ mW}}$$

b) La interposición de la placa, cuyo espesor denotaremos por h, entre el foco F_1 y el receptor supone la introducción de un desfase entre las señales recibidas en R de cada foco. Este desfase δ viene dado por:

$$\delta = (k(d-h) + k'h) - (kd) = (k'-k)h$$

Aquí, k' y k representan el número de ondas en la placa y en el medio, respectivamente. La interferencia destructiva en R exige que

$$\delta = (k'-k)h = 2\pi f(\frac{1}{c'} - \frac{1}{c})h = (2n+1)\pi$$

donde c' y c corresponden a la velocidad del sonido en la placa y en el medio, respectivamente, f a la frecuencia de las ondas emitidas, y n es un número entero. El espesor mínimo se obtiene para n = 0, y tenemos que

$$h = \frac{c'c}{2f\,(c-c')} = \frac{265\times 318}{2\times 1000\,(318-265)} = 0.795 \text{ m}$$

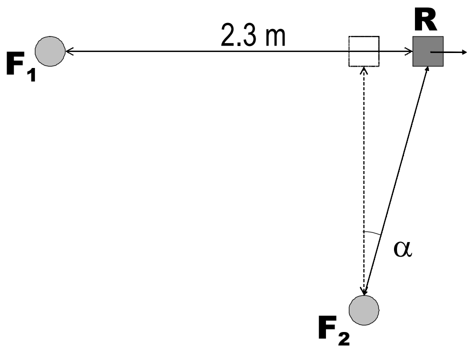
c) Si llamamos v a la velocidad del receptor, tenemos que la frecuencia de cada una de las señales en él es:

$$f_1 = \frac{c - v}{c} f_0 \,,$$

para la recibida del foco F_1, y

$$f_2 = \frac{c - v \operatorname{sen} \alpha}{c} f_0$$

para la procedente del segundo foco. El ángulo α puede obtenerse a partir de la representación adjunta:



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{0.3\, m}{2\, m} \quad \rightarrow \quad \operatorname{sen} \alpha = 0.148$$

Puesto que se detectan pulsaciones de 10 Hz

$$f_p = 10\,\text{Hz}; \qquad f_p = f_1 - f_2 = \frac{v(1 - \operatorname{sen} \alpha)}{c} f_0$$

Encontramos una velocidad de

$$\boxed{v = \frac{f_p}{f_0} \frac{c}{1 - \operatorname{sen} \alpha} = \frac{10}{1000} \frac{318}{1 - 0.148} = 3.7\ \text{m·s}^{-1}}$$

d) Para que no se produzcan pulsaciones, las frecuencias que se reciben desde cada emisor deben coincidir. Esto ocurre si el receptor se mueve a lo largo de la recta bisectriz del ángulo definido por los segmentos $\mathbf{RF_1}$ y $\mathbf{RF_2}$, dado que entonces el receptor se aleja de ambos focos, o se acerca a ellos, a idéntica velocidad. Cuando, moviéndose a lo largo de esa recta, se encuentra en el punto medio del segmento $\mathbf{F_1F_2}$, no hay modificación de la frecuencia emitida por los focos, y la detectada es, por lo tanto, también de 1 kHz.

3.- Un sistema masa-muelle oscila armónicamente de modo que, en el instante inicial, la elongación es 5.0 cm; la velocidad máxima es 10 m/s, y su período es $\pi/50$ s. Si la masa es m=0.1 kg, determine:

a) La función de la oscilación armónica.

b) La constante recuperadora del muelle.

Se introduce el sistema en un medio y la oscilación pasa a ser amortiguada. Después de 20 períodos, su amplitud se ha reducido de A_0 a A_0/e. Determinar:

c) La constante de amortiguamiento del medio.

Solución

a) Para escribir la función de la oscilación armónica, debemos determinar su frecuencia, su amplitud y su fase inicial en la expresión

$$x(t) = A \cos(\omega_0\, t + \varphi_0)$$

Por lo tanto, la función de la oscilación armónica se escribe, con *x* en cm y *t* en s:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{50}} = 100\ \text{rad·s}^{-1} \qquad A = \frac{v_{\text{máx}}}{\omega_0} = \frac{10}{100} = 0.1\,\text{m}$$

$$\cos \varphi_0 = \frac{x(0)}{A} \quad \rightarrow \quad \varphi_0 = \arccos \frac{x(0)}{A} = \arccos \frac{0.05}{0.1} = \frac{\pi}{3},\ \frac{5\pi}{3}$$

$$\boxed{x(t) = 10 \cos\left(100\, t + \frac{\pi}{3}\right)}$$

b) La constante recuperadora puede obtenerse a partir de la frecuencia y de la masa como:

$$\boxed{k = m\omega_0^2 = 0.1\times100^2 = 1\text{ kN/m}}$$

c) Utilizando la dependencia del tiempo de la amplitud de las oscilaciones amortiguadas, tenemos que

$$A(t = 20\,T') = A_0\, e^{-\gamma(20\,T')} = A_0\, e^{-1} \quad \rightarrow \quad \gamma\, T' = \frac{1}{20}$$

donde *T'* es el período de las oscilaciones amortiguadas, y γ el coeficiente de amortiguamiento. Puesto que

$$T' = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}\ , \quad \text{tenemos la ecuación} \quad \frac{2\pi\gamma}{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}} = \frac{1}{20}$$

Y de ella obtenemos la constante de amortiguamiento *b*, dado que:

$$\boxed{\gamma = \frac{b}{2m} = \frac{\omega_0}{\sqrt{(40\pi)^2+1}} \quad \rightarrow \quad b = \frac{2m\omega_0}{\sqrt{(40\pi)^2+1}} = \frac{2\times0.1\times100}{\sqrt{(40\pi)^2+1}} = 0.16\text{ kg s}^{-1}}$$

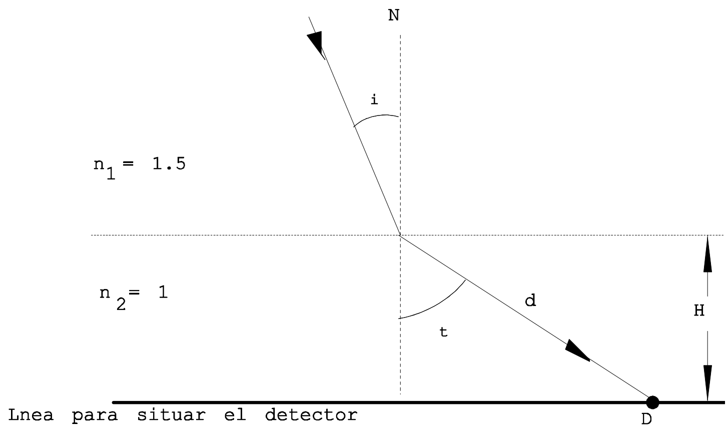
4.- Una onda electromagnética plana y armónica de frecuencia *f* = 100 MHz, que se propaga en un medio con índice de refracción n_1=1.5, incide sobre la superficie plana de separación con un segundo medio, de índice de refracción n_2=1. Este segundo medio posee además un coeficiente de absorción β, constante en todo el medio, para la radiación de esa frecuencia. Dentro de este medio, y a una distancia H de la interfase, se coloca un detector D.

a) Determine la longitud de onda de la radiación en cada uno de los dos medios.

b) Escriba la intensidad detectada en D, en función de la que se transmite en la superficie de separación (I_T), para los casos: i) de incidencia normal; ii) ángulo de incidencia de 30º; iii) ángulo de incidencia de 45º.

Solución

Una onda electromagnética, de frecuencia *f* = 100 MHz, se propaga en un medio 1 de índice de refracción n_1 = 1.5, y se encuentra con otro medio 2 de índice n_2 = 1. En la superficie de separación parte se refleja y parte se transmite, interesando en este caso la transmisión.



a) La onda en el segundo medio surge debido a la oscilación forzada inducida por la onda incidente, así que las ondas en los dos medios tiene la misma frecuencia y como las velocidades de propagación son diferentes sus longitudes de onda también lo serán.

$$f_1 = f_2 = f \quad \Rightarrow \quad \frac{c_1}{\lambda_1} = \frac{c_2}{\lambda_2} \qquad [4.1]$$

pero en el medio 2 el índice de refracción es igual a la unidad, y por tanto la velocidad es la de una onda electromagnética en el vacío $c = c_2 = 3\times10^8$ m/s; en consecuencia,

$$\boxed{\lambda_2 = c/f = 3\cdot10^8/10^8 = 3\text{ m}} \quad \text{y de [4.1]} \quad \boxed{\lambda_1 = \lambda_2\frac{c_1}{c} = \frac{\lambda_2}{n_1} = \frac{3}{1.5} = 2\text{ m}}$$

b) En la figura, $\theta_i = i$ y $\theta_t = t$, se puede ver un rayo incidente y otro transmitido, verificándose la ley de Snell de la refracción,

$$n_1 \operatorname{sen}\theta_i = n_2 \operatorname{sen}\theta_t \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\theta_t = 1.5\operatorname{sen}\theta_i \qquad [4.2]$$

Como el medio es absorbente, de coeficiente de absorción β, la intensidad recibida por un sensor *D* a una profundidad *H* será, en función de la que se transmite en la superficie de separación I_T y con la notación de la figura,

$$I_D = I_T \cdot e^{-\beta d} = I_T \cdot e^{-\beta H/\cos\theta_t} \qquad [4.3]$$

donde *d* es la distancia recorrida en el segundo medio. De (4.2) determinamos el ángulo de transmisión θ_t y de 4.3] determinamos la intensidad en el detector.

b.i) $\boxed{\theta_i = 0 \;\Rightarrow\; \vartheta_t = 0 \;\Rightarrow\; \cos\theta_t = 1 \;\Rightarrow\; I_D = I_T \cdot e^{-\beta H}}$

b.ii) $\boxed{\theta_i = 30^0 \;\Rightarrow\; \operatorname{sen}\vartheta_t = 0.75 \;\Rightarrow\; \cos\theta_t = 0.66 \;\Rightarrow\; I_D = I_T \cdot e^{-1.51\cdot\beta\cdot H}}$

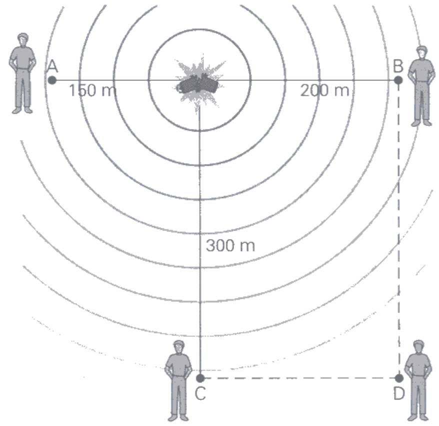
b.iii) $\theta_i = 45^0 \;\Rightarrow\; \operatorname{sen}\vartheta_t = 1.06 > 1 \;\Rightarrow$ **Reflexión total** y toda la energía es reflejada y por tanto no hay señal transmitida, $\boxed{I_D = 0}$

5.- Durante una celebración explota un cohete. Considerando el cohete como fuente puntual, determine:

a) Los niveles de intensidad en los puntos B, C y D si en A se detecta un nivel de intensidad de 70 dB.

b) La potencia del cohete si la intensidad de referencia es $I_{ref}=10^{-12}$ W/m^2.

(Nota: supóngase que la potencia emitida se distribuye sobre ***media*** esfera.)



Solución

Tenemos un emisor de onda semiesférica, por tanto los frentes de onda serán esféricos y se verifica la ley inversa del cuadrado de la distancia,

$$I(r) = P/(2\pi r^2) \qquad [5.1]$$

donde *P* es una constante igual a la potencia emitida por el cohete. De (5.1) se verifica:

$$I(r)\cdot r^2 = I(r_1)\cdot r_1^2 = ... = CTE = I(A)\cdot r_A^2 \qquad [5.2]$$

Por otro lado, de la definición del nivel de intensidad, y particularizada en A tenemos:

$$NI(dB) = 10\log\frac{I}{I_{ref}} \quad\Rightarrow\quad NI_A(dB) = 10\ \log\frac{I_A}{I_{ref}}$$

y por tanto dando los valores conocidos del punto A,

$$70 = 10\log\frac{I_A}{I_{ref}} \quad\Rightarrow\quad I_A = I_{ref}10^{70/10} = I_{ref}10^7 \qquad [5.3]$$

a) Si en (5.2) sustituimos (5.3) tenemos:

$$I(r) = 10^7 I_{ref}\left(\frac{r_A}{r}\right)^2 \quad\Rightarrow\quad NI = 10\log\frac{I}{I_{ref}} = 10\log\left(10^7\left(\frac{r_A}{r}\right)^2\right)$$

que particularizada para los puntos B, C y D nos da

$$\boxed{NI_B = 10\log\left(10^7\left(\frac{r_A}{r_B}\right)^2\right) = 10\log\left(10^7\left(\frac{150}{200}\right)^2\right) = 67.5\ \text{dB}}$$

$$NI_C = 10\log\left(10^7\left(\frac{r_A}{r_C}\right)^2\right) = 10\log\left(10^7\left(\frac{150}{300}\right)^2\right) = 64.0 \text{ dB}$$

$$NI_D = 10\log\left(10^7\left(\frac{r_A}{r_D}\right)^2\right) = 10\log\left(10^7\left(\frac{150}{(200^2+300^2)^{1/2}}\right)^2\right) = 62.4 \text{ dB}$$

b) De aplicar (5.1) en A y teniendo en cuenta (5.3)

$$P = 2\pi r_A^2 I_A = 2\pi r_A^2 \cdot 10^7 I_{ref} = 2\pi \cdot 10^7 \cdot 150^2 \cdot 10^{-12} = 1.4 \text{ W}$$

6.- En una cuerda de longitud 30 cm, con uno de sus extremos situado en *x*=0, se produce una onda estacionaria representada por $y(x,t) = A\,\mathrm{sen}(kx)\,\mathrm{sen}(\omega t)$

Sabiendo que la distancia entre dos nodos consecutivos es de 6 cm, determine:

a) La posición de los nodos.

b) La posición de los antinodos.

c) El valor de la elongación de los puntos de la cuerda para t=T, siendo T el período de vibración.

Solución

Se nos presenta la ecuación de una onda estacionaria en una cuerda de 30 cm de longitud y tal que un extremo está en la posición x = 0. Por otro lado nos dice que la distancia entre nodos consecutivos es de 6 cm; en consecuencia los datos son:

$$y(x,t) = A\,\mathrm{sen}\,(k\,x)\ \mathrm{sen}\,(\omega t) \quad \text{y} \quad x_N(n) - x_N(n-1) = \frac{\lambda}{2} = 6 \text{ cm} \qquad [6.1]$$

a) los nodos tienen amplitud nula, por tanto:

$$A(x_N) = 0 = A\,\mathrm{sen}\,(k\,x_N) \;\Rightarrow\; k\,x_N = n\,\pi \;\Rightarrow\; x_N = n\,\frac{\lambda}{2} \qquad [6.2]$$

si en (6.2), teniendo en cuenta que la cuerda empieza en x = 0, damos valores positivos al parámetro n,

$$x_N = \{0,\ 6,\ 12,\ 18,\ 24,\ 30\} \text{ cm}$$

b) como la distancia entre nodo y antitodo consecutivos es de la cuarta parte de la longitud de onda, y que la distancia entre antinodos consecutivos es de media longitud de onda, se desprende que las posiciones de los antinodos son:

$$x_{AN} = \{3,\ 9,\ 15,\ 21,\ 27\} \text{ cm}$$

c) de la primera parte de (6.1) y teniendo en cuenta que $\omega T = 2\pi$ podemos escribir

$$y(x,T) = A\,\mathrm{sen}\,(k\,x)\ \mathrm{sen}\,(\omega T) = A\,\mathrm{sen}\,(k\,x)\ \mathrm{sen}\,(2\pi) = 0$$
