Ondas

Por onda entendemos la propagación a través del espacio de una perturbación en alguna magnitud física. En tal situación, la variable en consideración depende tanto del punto del espacio como del instante de tiempo. Restringiéndonos al caso más simple de un medio unidimensional, como pudiera ser una cuerda tensa, por ejemplo, la descripción matemática de una onda que se propaga por él pasa por determinar la expresión de una *función de ondas* $\psi(x,t)$ que nos proporciona los valores de una cierta magnitud física en cada punto e instante. La forma concreta de esta función depende de la situación particular que se estudie, pero el hecho de que tiene lugar una propagación en el medio exige que se presente una dependencia del tiempo y del espacio dada por

$$\psi(x,t) = F(x - vt) \tag{1}$$

para una onda que viaja en el sentido positivo del eje x, y

$$\psi(x,t) = F(x + vt) \tag{2}$$

si avanza en el sentido negativo del eje. En ambos casos, v es la velocidad de propagación de la onda.

Esta misma dependencia puede expresarse en la forma

$$\psi(x,t) = f(t \pm \frac{x}{v}) \tag{3}$$

Una perturbación $f(t)$ que sucede en $x = 0$ en el instante t alcanza otro punto x del medio transcurrido un tiempo (x/v). Si dicha perturbación es periódica, es decir, si cumple que

$$f(t + T) = f(t) \tag{4}$$

encontramos que existe un número λ tal que, en un instante determinado t_0 se verifica que

$$f(t_0 \pm \frac{x+\lambda}{v}) = f(t_0 \pm \frac{x}{v}) \tag{5}$$

siempre que

$$\lambda = vT \tag{6}$$

Así, no sólo existe una periodicidad temporal, de modo que la perturbación se repite al cabo de un período T en cada punto del medio, sino que en un instante determinado, la perturbación presenta una periodicidad espacial y se repite en puntos separados una distancia λ, denominada *longitud de onda*. Dado que cualquier función periódica puede escribirse en términos de una suma de funciones seno y coseno, nos interesa de modo particular el caso de las *ondas armónicas*, en las que tenemos que

$$f(t) = Acos\ (\omega t) \tag{7}$$

y por tanto

$$\psi(x,t) = f(t \pm \frac{x}{v}) = Acos\ (\omega t \pm \frac{\omega}{v}x) = Acos\ (\omega t \pm kx) \tag{8}$$

donde k es el *número de ondas*, relacionado con la longitud de onda λ según

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{9}$$

La onda armónica puede escribirse de cualquiera de estas dos formas

$$\psi(x,t) = Acos\ (\omega t \pm kx) = Acos\ (2\pi(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda}) \tag{10}$$

El signo (+) en la fase nos daría una onda armónica que viaja en el sentido negativo del eje x, y el signo (-), una que se propaga en el sentido positivo. La propagación supone que un determinado valor fijo de la fase $\phi(t) = \omega t \pm kx$ avanza con la velocidad de propagación v, a la que llamaremos *velocidad de fase*:

$$\phi(t) = cte. \rightarrow \frac{d\phi}{dt} = 0 \tag{11}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega \pm k\frac{dx}{dt} = 0 \tag{12}$$

$$\frac{dx}{dt} = \pm\frac{\omega}{k} = \pm v \tag{13}$$

Ecuación diferencial del movimiento ondulatorio unidimensional

La forma de la función de ondas requerida por la propagación

$$\psi(x,t) = F(x \pm vt) \tag{14}$$

implica que las derivadas parciales, con respecto al tiempo y al espacio, de la función ψ poseen entre sí una cierta relación denominada *ecuación de ondas*.

Sea $u = x \pm vt$, de modo que

$$\frac{\delta u}{\delta t} = \pm v \tag{15}$$

$$\frac{\delta u}{\delta x} = 1 \tag{16}$$

Encontramos que

$$\psi(x,t) = F(u) \tag{17}$$

$$\frac{\delta\psi(x,t)}{\delta t} = \frac{dF(u)}{du}\frac{\delta u}{\delta t} = \pm v\frac{dF}{du} \tag{18}$$

$$\frac{\delta^2\psi(x,t)}{\delta^2 t} = \pm v\frac{d^2F(u)}{du^2}\frac{\delta u}{\delta t} = v^2\frac{d^2F}{du^2} \tag{19}$$

$$\frac{\delta\psi(x,t)}{\delta x} = \frac{dF(u)}{du}\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{dF}{du} \tag{20}$$

$$\frac{\delta^2\psi(x,t)}{\delta^2 x} = \frac{d^2F(u)}{du^2}\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{d^2F}{du^2} \tag{21}$$

Comparando estas expresiones, llegamos a la ecuación de ondas:

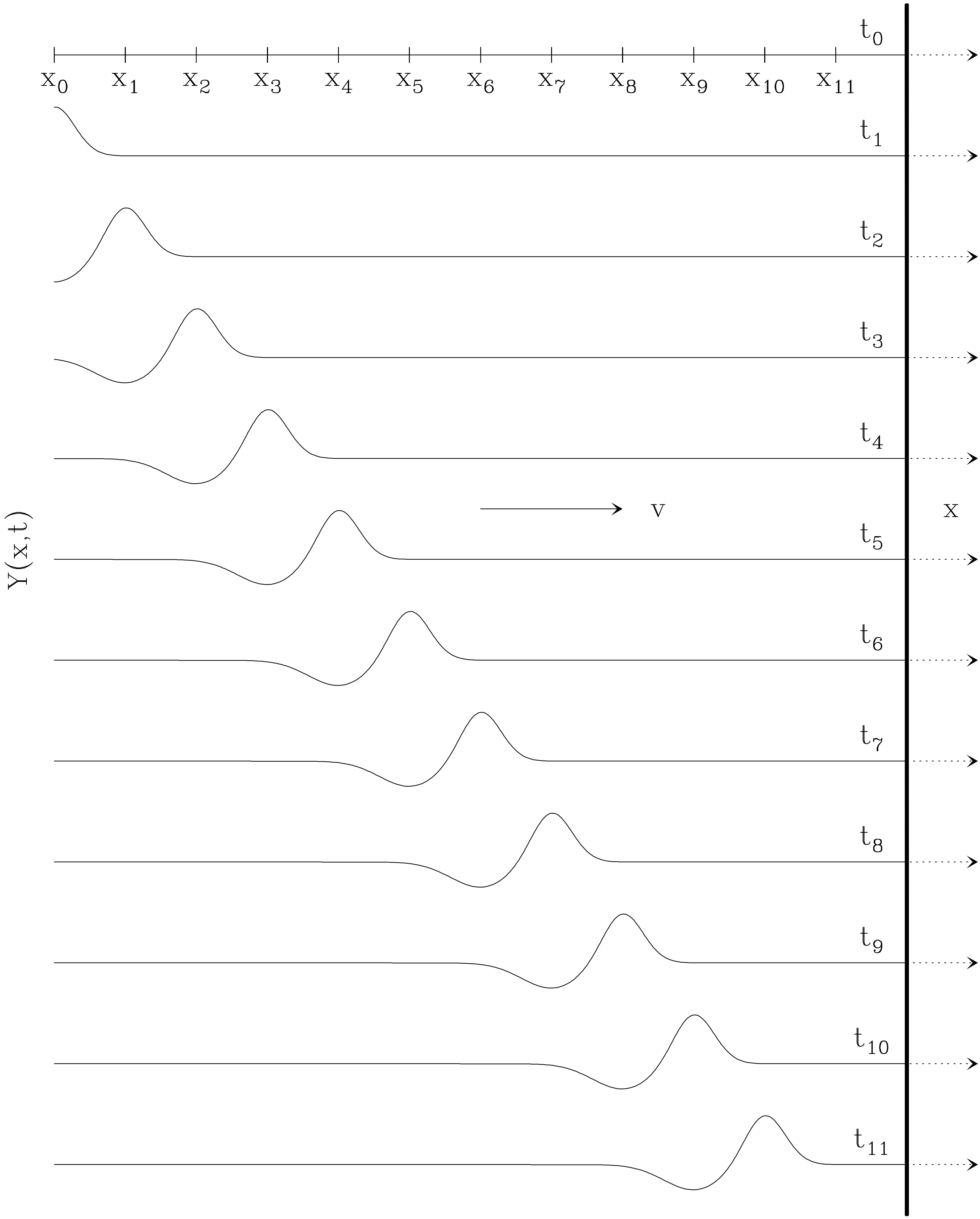
$$\frac{\delta^2\psi(x,t)}{\delta t^2} = v^2\frac{\delta^2\psi(x,t)}{\delta x^2} \tag{22}$$

Ésta es una ecuación lineal en derivadas parciales, cuya solución general adoptará la forma

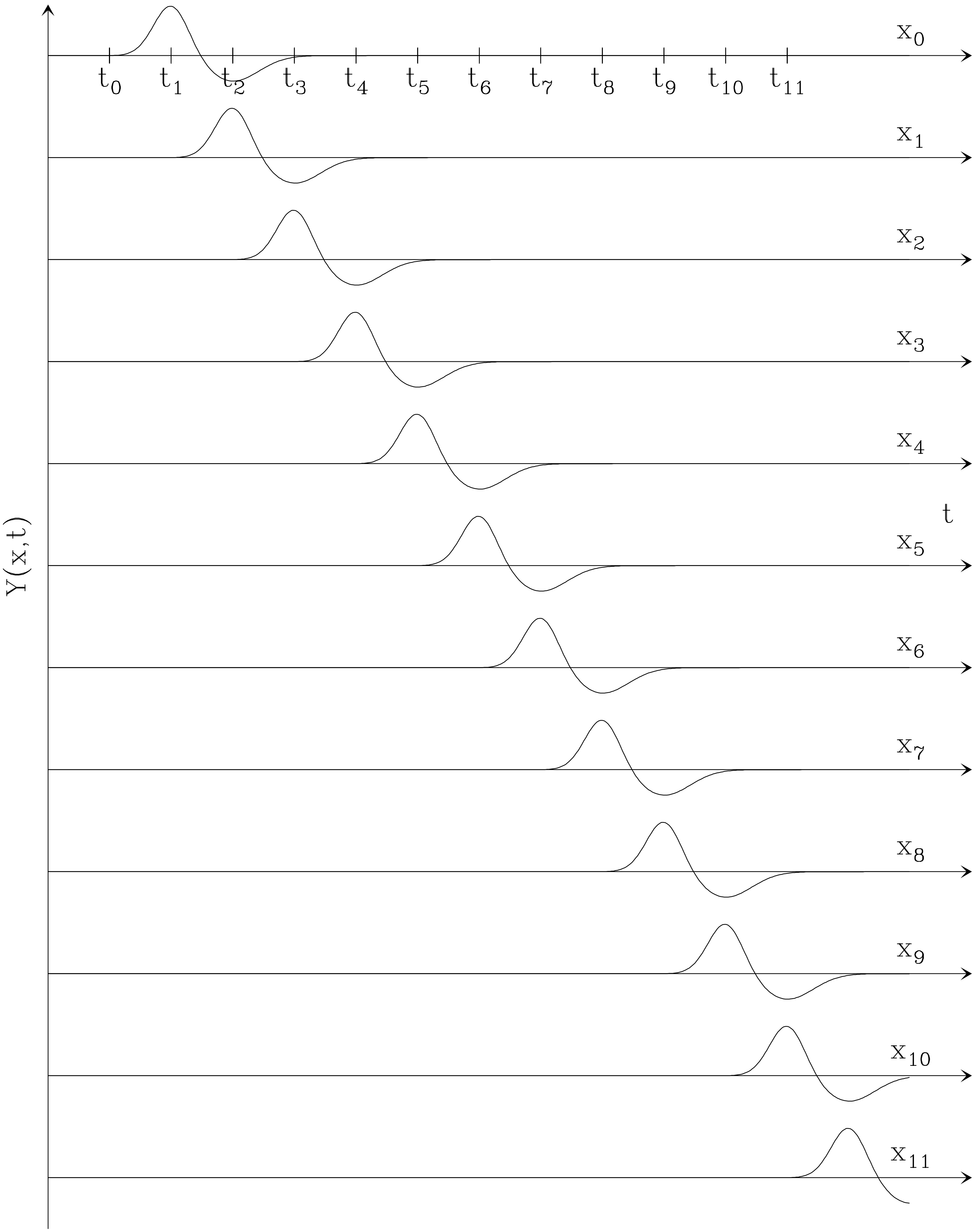
$$\psi(x,t) = G(x+vt) + H(x-vt) \tag{23}$$

Para determinar la solución en un problema concreto, hemos de aportar las condiciones iniciales y de contorno que le caracterizan.

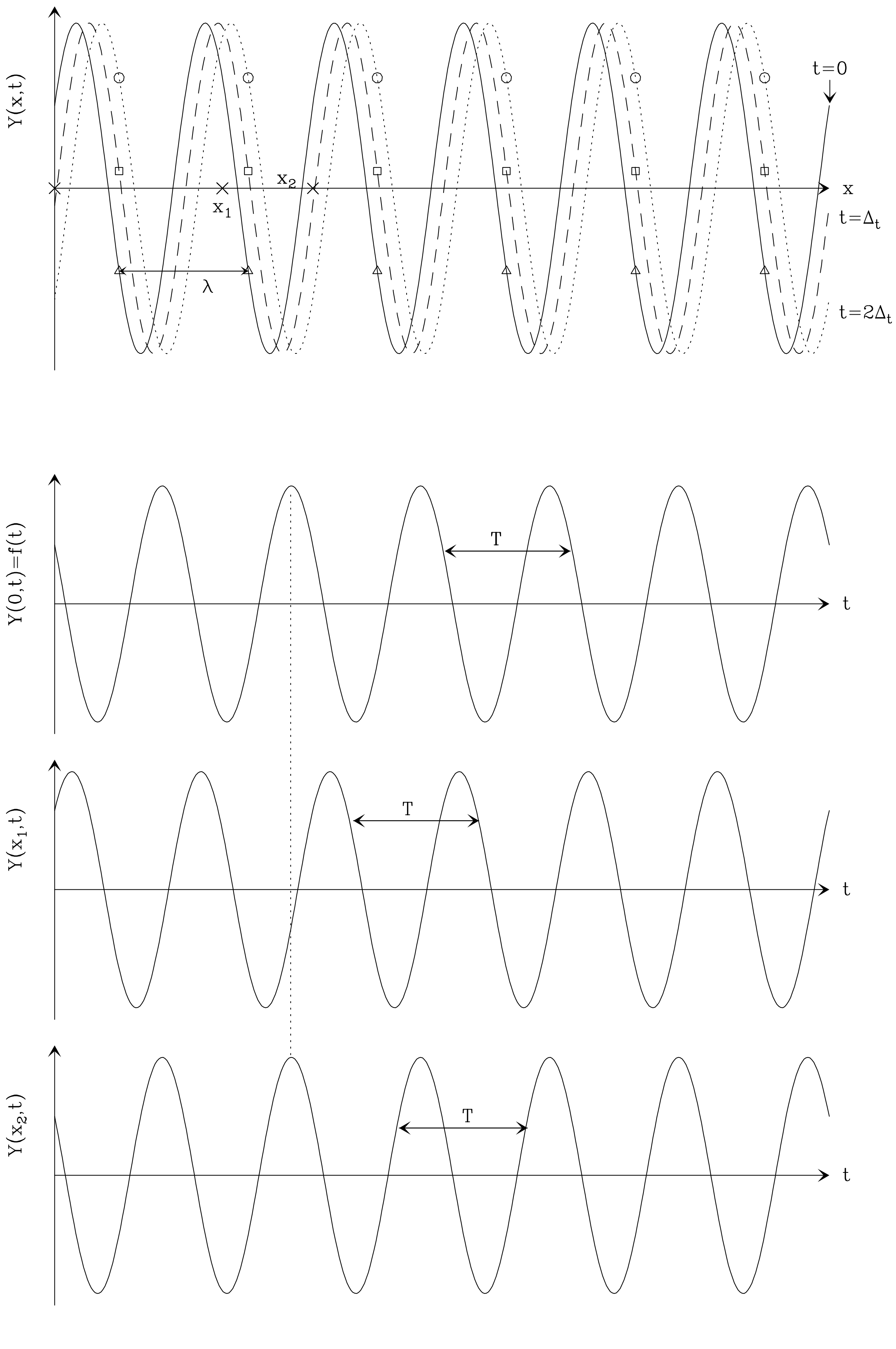
PROPAGACION DE UNA ONDA UNIDIMENSIONAL



EVOLUCION TEMPORAL DE UNA ONDA UNIDIMENSIONAL



ONDA ARMONICA



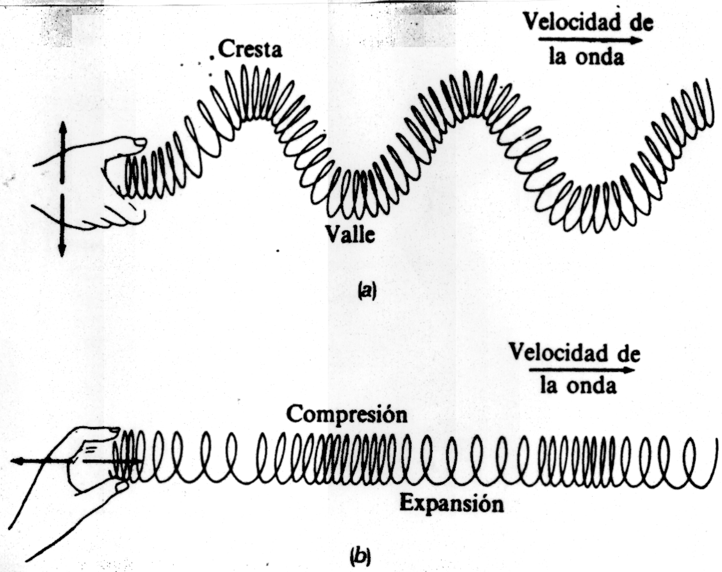


Figura 32.2. Ondas en un muelle. (*a*) Onda transversal. (*b*) Onda longitudinal.

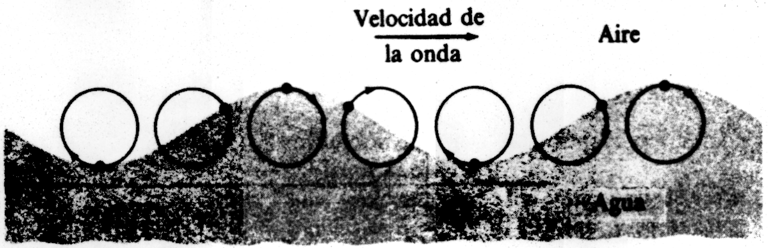


Figura 32.3. Movimiento de partículas para una onda en el agua. Cuando la onda transcurre, el desplazamiento de cada partícula de agua tiene una componente paralela y otra componente perpendicular a la velocidad de la onda. Las ondas en el agua son combinaciones de ondas transversales y ondas longitudinales.