Superposición de dos MAS de igual dirección y frecuencia

Sean dos movimientos armónicos simples (MAS) que ocurren en la misma dirección y que oscilan con idéntica frecuencia, y están dados respectivamente por:

$$\psi_1(t) = A_1 cos(\omega t + \phi_1) \tag{1}$$

y

$$\psi_2(t) = A_2 cos(\omega t + \phi_2) \tag{2}$$

Podemos escribirlos como la parte real de sendos fasores z_1 y z_2:

$$\psi_1 = Re(z_1) = Re(A_1 e^{j(\omega t+\phi_1)}) = Re(A_1 e^{j\phi_1} e^{j\omega t}) \tag{3}$$

$$\psi_2 = Re(z_2) = Re(A_2 e^{j(\omega t+\phi_2)}) = Re(A_2 e^{j\phi_2} e^{j\omega t}) \tag{4}$$

La superposición de los MAS ψ_1 y ψ_2 viene dada por la suma

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = Re(z_1 + z_2) \tag{5}$$

que arroja el MAS

$$\psi(t) = A cos(\omega t + \phi) \tag{6}$$

de la frecuencia igual a la de ψ_1 y ψ_2, y amplitud A y fase inicial ϕ determinadas por:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 cos(\phi_2 - \phi_1)} \tag{7}$$

$$\phi = \arctan \frac{A_1 sen\ \phi_1 + A_2 sen\ \phi_2}{A_1 cos\ \phi_1 + A_2 cos\ \phi_2} \tag{8}$$

Superposición de dos MAS de igual dirección y distinta frecuencia. Pulsaciones

La superposición de dos MAS que tienen lugar en la misma dirección pero oscilan con frecuencias diferentes no resulta en otro MAS. Sean T_1 y T_2 los períodos correspondientes a esas frecuencias; en el caso particular de que se cumpla que

$$n_1 T_1 = n_2 T_2 \tag{9}$$

donde n_1 y n_2 son dos números enteros, la superposición de los dos MAS produce un movimiento periódico de periodo

$$T = n_1 T_1 = n_2 T_2 \tag{10}$$

Tratemos ahora la superposición de dos MAS de idéntica amplitud y frecuencias cualesquiera ω_1 y ω_2:

$$\psi(t) = Acos\ (\omega_1 t) + Acos\ (\omega_2 t) \tag{11}$$

Podemos escribir

$$cos\ (\omega_1 t) = cos\ (\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t) = \tag{12}$$

$$= cos\ (\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t) cos\ (\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t) + sen\ (\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t) sen\ (\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t) \tag{13}$$

y

$$cos\ (\omega_2 t) = cos\ (\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t) = \tag{14}$$

$$= cos\ (\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t) cos\ (\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t) + sen\ (\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t) sen\ (\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t) \tag{15}$$

$$= cos\ (\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t) cos\ (\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t) - sen\ (\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t) sen\ (\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t) \tag{16}$$

La suma de estas expresiones nos conduce a:

$$\psi(t) = 2Acos\ (\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t) cos\ (\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t) \tag{17}$$

En la situación en que $\omega_1 \approx \omega_2$, esta función representa una oscilación de frecuencia igual al promedio de ω_1 y ω_2 cuya amplitud viene modulada por una oscilación de frecuencia mucho menor, dada por la mitad de la diferencia entre ω_1 y ω_2. Este fenómeno recibe el nombre de *pulsaciones*. La periodicidad en la modulación de la amplitud de la oscilación más rápida viene dada por la frecuencia y el período de las pulsaciones o de batido:

$$\omega_b = \omega_2 - \omega_1 \tag{18}$$

$$T_b = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} \tag{19}$$

Composición de dos MAS en direcciones perpendiculares. Figuras de Lissajous

Supongamos que una partícula se mueve en el plano xy, de modo que su posición en un determinado instante viene dada por el vector

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \tag{20}$$

el cual resulta así de la composición de los movimientos $x(t)$ e $y(t)$.

Consideremos el caso en que esos movimientos son dos MAS de la misma frecuencia:

$$x = A_1 cos\ (\omega t) \tag{21}$$

$$y = A_2 cos\ (\omega t - \delta) \tag{22}$$

Podemos reescribir estas expresiones como:

$$\frac{x}{A_1} = cos\ (\omega t) \tag{23}$$

$$\frac{y}{A_2} = cos\ (\omega t - \delta) = cos\ (\omega t) cos\ \delta + sen\ (\omega t) sen\ \delta \tag{24}$$

Eliminando el tiempo, llegamos a una expresión para la trayectoria de la partícula en el plano:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2\frac{xy}{A_1 A_2} cos\ \delta = sen^2 \delta \tag{25}$$

En este caso de frecuencias iguales para los movimientos en ambos ejes, la partícula describe trayectorias elípticas cuya forma y sentido de recorrido dependen de la relación de amplitudes y del desfase δ. En el caso de amplitudes iguales, se tienen circunferencias en lugar de elipses. Para desfases $\delta = 0, \pi$, las trayectorias son segmentos rectos.

Cuando las frecuencias no son iguales, pero aún mantienen entre sí una relación de números enteros

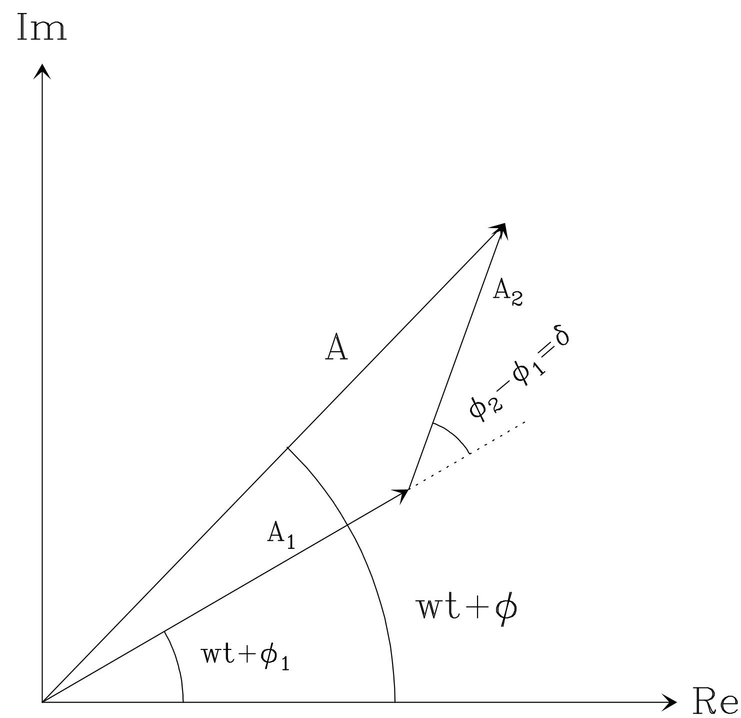
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_2}{n_1} \tag{26}$$

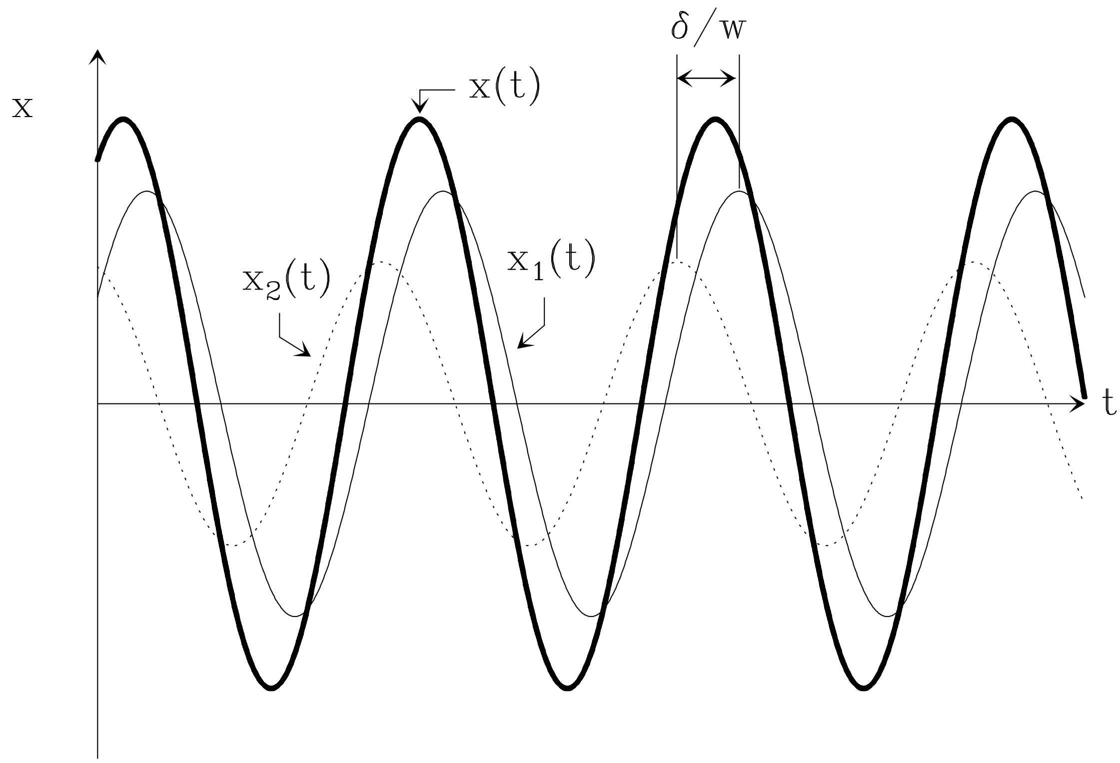
se obtienen trayectorias definidas en el plano, con formas progresivamente más complicadas. Estas trayectorias son denominadas *figuras de Lissajous*. Cuando las frecuencias son arbitrarias no es posible identificar una figura de esta clase, dado que la partícula no repite periódicamente su recorrido.

Problemas

Del libro de Álvarez-Ude, González y Raposo: capítulo 8, problemas 11, 12, 13.

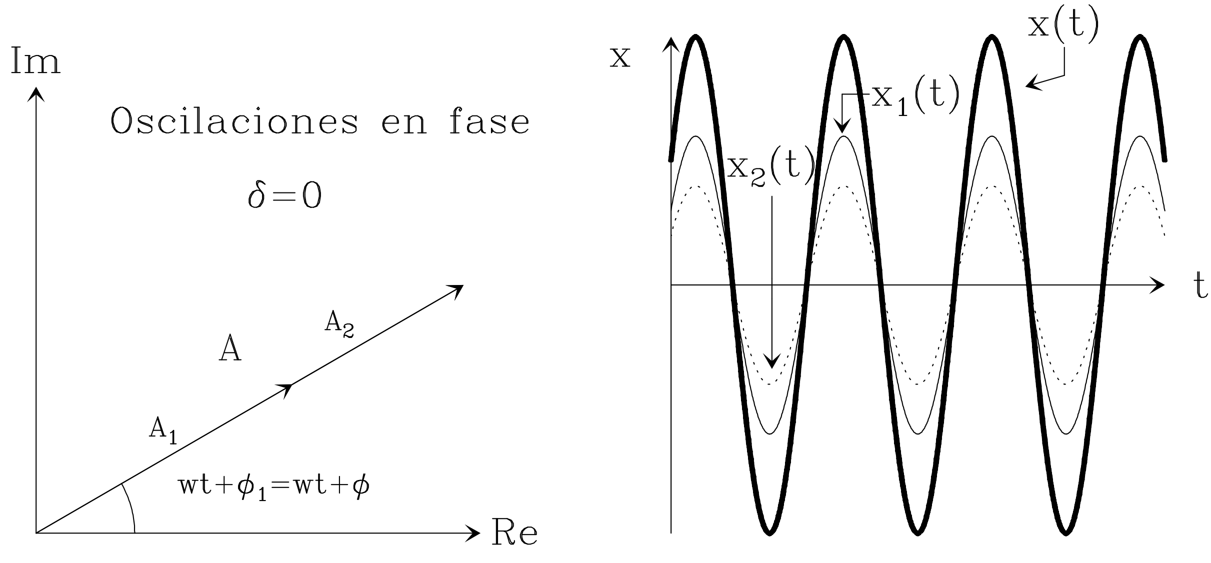
COMPOSICION DE 2 MAS DE LA MISMA FRECUENCIA

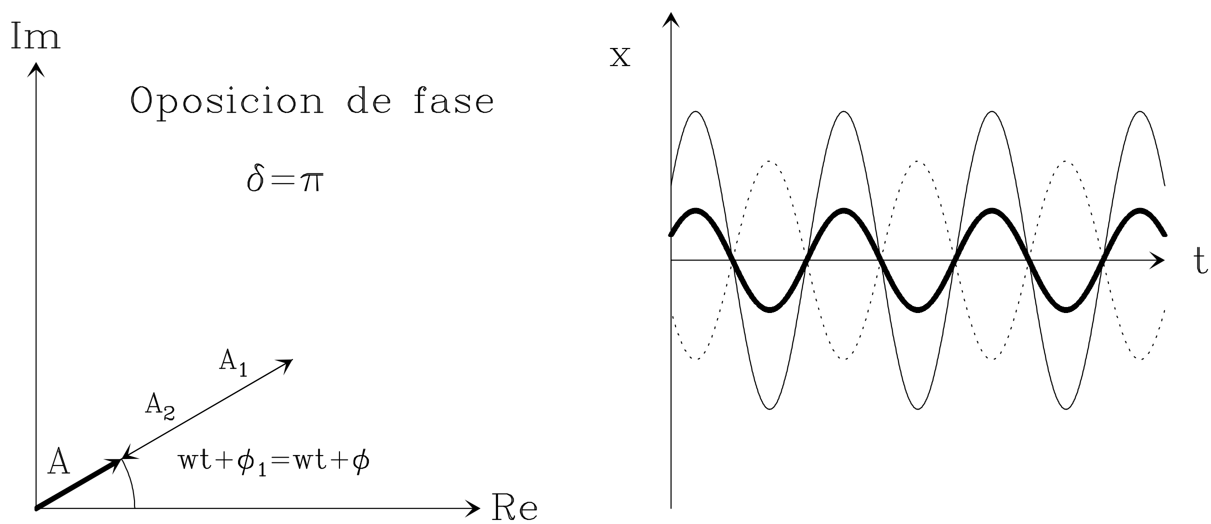


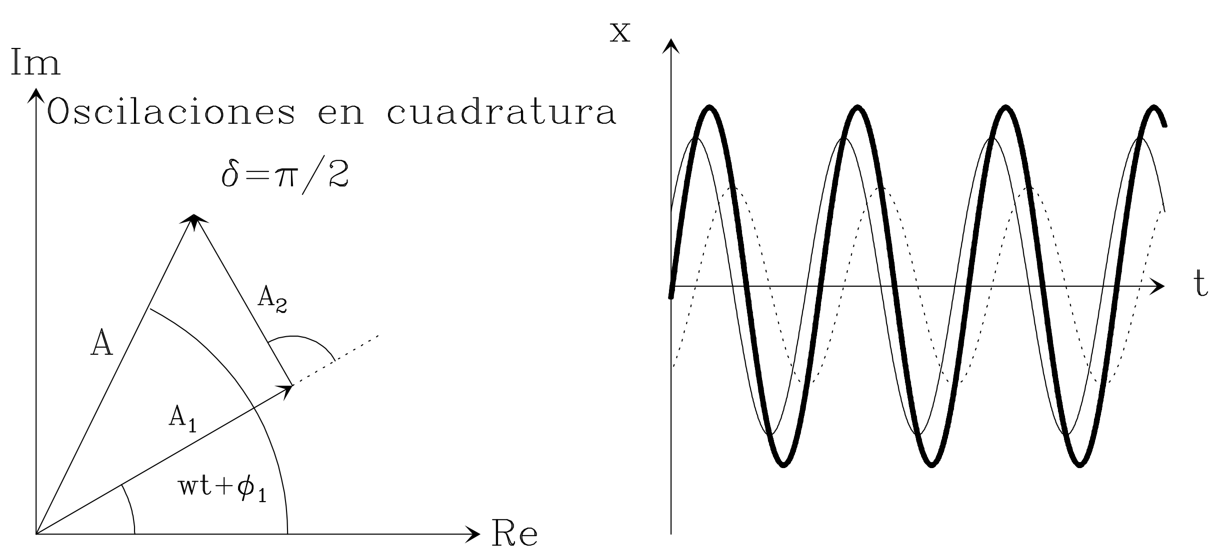


SUPERPOSICION DE 2 MAS DE LA MISMA FRECUENCIA

CASOS PARTICULARES







PULSACIONES