Oscilaciones forzadas

Consideraremos ahora cuál es el efecto a que da lugar la actuación de un agente externo sobre los sistemas que hemos venido estudiando. En el sistema masa-muelle, además de a la fuerza recuperadora y a la de fricción, la masa puede hallarse sometida a una fuerza externa. En el circuito RLC, podemos introducir una fuente de alimentación. En estos dos casos, y en otros muchos ejemplos, la ecuación diferencial que rige el comportamiento del sistema es del tipo:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + 2\gamma\frac{d\psi}{dt} + \omega_0^2\psi = f(t) \tag{1}$$

Asumiremos aquí que la función $f(t)$ toma la forma

$$f(t) = f_0 cos(\omega' t) \tag{2}$$

Esto hace más asequible nuestro tratamiento, y proporciona a la vez la base para estudiar casos más complicados, dado que cualquier función periódica, por ejemplo $g(t) = g(t+T') = g(t+(2\pi/\omega'))$, puede escribirse como una suma de funciones seno y coseno:

$$g(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k cos(k\omega' t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k sen(k\omega' t) \tag{3}$$

En la masa y el muelle, la inclusión de una fuerza externa $F(t) = F_0 cos(\omega' t)$ lleva a la ecuación de movimiento

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -b\frac{dx}{dt} - kx + F(t) \tag{4}$$

Reordenando los términos:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}cos(\omega' t) \tag{5}$$

que es similar a la ecuación (1).

Si conectamos una fuente de alimentación, que suministra un voltaje alterno $V(t) = V_0 cos(\omega' t)$, en el circuito RLC, tenemos que

$$L\frac{dI}{dt} + IR + \frac{q}{C} = V(t) \tag{6}$$

Reescribiendo todos los términos en función de q y reordenando, llegamos a

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = \frac{V_0}{L}cos(\omega' t) \tag{7}$$

que de nuevo repite la forma de la ecuación (1).

Resolución de la ecuación diferencial del oscilador forzado

Deseamos encontrar la función $\psi(t)$ que satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + 2\gamma\frac{d\psi}{dt} + \omega_0^2\psi = f_0cos(\omega' t) \tag{8}$$

Probaremos soluciones del tipo

$$\psi = Acos(\omega t - \delta) \tag{9}$$

pero lo haremos mediante la técnica del exponente complejo, proponiendo la solución:

$$z = Ae^{j(\omega t-\delta)} = Ae^{-j\delta}e^{j\omega t} \tag{10}$$

Esto nos exige escribir la función $f(t)$ como parte real de la función compleja

$$\hat{f} = f_0e^{j(\omega' t)} \tag{11}$$

La función z debe satisfacer la ecuación diferencial

$$\frac{d^2z}{dt^2} + 2\gamma\frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = f_0e^{j(\omega' t)} \tag{12}$$

Al derivar y sustituir la expresión de z, encontramos

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + j2\gamma\omega)Ae^{-j\delta}e^{j\omega t} = f_0e^{j(\omega' t)} \tag{13}$$

Para que esta ecuación se verifique en todo instante de tiempo, es preciso que

$$\omega = \omega' \tag{14}$$

de modo que **la frecuencia de la solución $\psi(t)$ es igual a la frecuencia del forzamiento $f(t)$**.

Con esto, la ecuación que nos queda es:

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + j2\gamma\omega)Ae^{-j\delta} = f_0 \tag{15}$$

y de ella obtenemos

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + j2\gamma\omega)A = f_0e^{j\delta} \tag{16}$$

Separando las partes real e imaginaria, llegamos a las ecuaciones

$$(\omega_0^2 - \omega^2)A = f_0cos\ \delta \tag{17}$$

$$2\gamma\omega A = f_0 sen\ \delta \tag{18}$$

A partir de estas ecuaciones obtenemos

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \tag{19}$$

$$\delta = \arctan\left(\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \tag{20}$$

La solución que buscamos, pues, es una oscilación dada por

$$\psi = Acos(\omega t - \delta) \tag{21}$$

con la misma frecuencia del forzamiento $f(t)$ ($\omega = \omega'$) y una amplitud A determinada por las características de ese forzamiento y las del sistema, las cuales determinan asimismo el valor de δ, que nos informa de cuánto está retrasada la solución $\psi(t)$ con respecto al forzamiento aplicado $f(t)$.

Resonancia en amplitud

Variando la frecuencia ω' de la función $f(t)$, manteniendo su amplitud f_0 constante, encontramos que existe un valor para esa frecuencia tal que la amplitud de la respuesta $\psi(t)$ que muestra el sistema es máxima. Podemos determinar cuál es esta frecuencia a partir de la condición

$$\frac{dA}{d\omega} = 0 \tag{22}$$

que nos lleva a la **frecuencia de resonancia en amplitud**

$$\omega_{RA} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \tag{23}$$

Para que esta frecuencia sea un número real mayor que cero, y se presente este máximo en la amplitud A de las oscilaciones forzadas, debe cumplirse que

$$\frac{\omega_0}{\gamma} > \sqrt{2} \tag{24}$$

Resonancia en velocidad

La primera derivada de la solución $\psi(t)$, que nos daría la velocidad en el caso del sistema masa-muelle, o la intensidad si se trata del circuito RLC, viene dada por:

$$\frac{d\psi}{dt} = -\omega A sen(\omega t - \delta) \tag{25}$$

La amplitud de esta función es máxima cuando se verifica que

$$\frac{d(\omega A)}{d\omega} = 0 \tag{26}$$

lo que nos lleva a la **frecuencia de resonancia en velocidad**

$$\omega_{RV} = \omega_0 \tag{27}$$

Cuando la frecuencia de forzamiento seleccionada coincide con la frecuencia natural del sistema, se obtiene un máximo en la amplitud de las oscilaciones de velocidad (o intensidad, según el caso). Con esta frecuencia, además, el desfase δ toma el valor de $\frac{\pi}{2}$: el desplazamiento y la fuerza aplicada están en cuadratura, mientras que la velocidad y la fuerza aplicada oscilan en fase.

Energía en el oscilador forzado

Tomando el ejemplo de la masa y el muelle, podemos escribir la energía elástica U y la energía cinética E_c como

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2cos^2(\omega t - \delta) = \frac{1}{2}m\omega_0^2A^2cos^2(\omega t - \delta) \tag{28}$$

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2sen^2(\omega t - \delta) \tag{29}$$

La energía total viene dada por

$$E = U + E_c = \frac{1}{2}m\omega_0^2A^2[cos^2(\omega t - \delta) + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}sen^2(\omega t - \delta)] \tag{30}$$

Promediando en periodo (o en un número entero de ellos), tenemos que

$$< E >= \frac{1}{4}m\omega_0^2A^2[1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}] \tag{31}$$

lo que nos muestra que la energía total promedio en el sistema se mantiene constante. Esto supone que la potencia promedio suministrada al sistema por el agente externo debe ser eliminada por el mecanismo de disipación correspondiente

$$< P_{sum} >=< P_{dis} > \tag{32}$$

Mostremos que esto es así en el caso del circuito RLC. La potencia suministrada al sistema es

$$P_{sum} = IV = [-\omega A sen(\omega t - \delta)][V_0 cos(\omega t)] \tag{33}$$

que podemos reescribir como

$$P_{sum} = [-\omega A sen(\omega t) cos\ \delta + \omega A cos(\omega t) sen\ \delta][V_0 cos(\omega t)] \tag{34}$$

Al promediar, obtenemos

$$< P_{sum} >= \frac{1}{2}\omega A V_0 sen\ \delta \tag{35}$$

En el circuito RLC, la ecuación (18) se escribe como

$$2\gamma\omega A = \frac{V_0}{L} sen\ \delta \tag{36}$$

$$< P_{sum} >= \gamma L \omega^2 A^2 \tag{37}$$

La potencia disipada en la resistencia es

$$P_{dis} = I^2 R = [-\omega A sen(\omega t - \delta)]^2 R \tag{38}$$

Al promediar, y dado que

$$R = 2\gamma L \tag{39}$$

obtenemos

$$< P_{dis} >= \gamma L \omega^2 A^2 =< P_{sum} >= P(\omega) \tag{40}$$

Esta potencia alcanza un valor máximo cuando la frecuencia del forzamiento aplicado coincide con la frecuencia natural ω_0. El valor máximo de la potencia es

$$P_m = \frac{1}{4\gamma}\frac{V_0^2}{L} \tag{41}$$

Podemos reescribir la potencia como

$$P = P_m \frac{1}{\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{4\gamma^2\omega^2} + 1} \tag{42}$$

El intervalo de frecuencias $\Delta\omega$ tal que

$$P(\omega_0 \pm \Delta\omega) = \frac{1}{2} P_m \tag{43}$$

nos da la anchura del pico en la potencia:

$$\Delta\omega \approx \gamma \tag{44}$$

Régimen estacionario y transitorios

Hemos descrito una solución para el oscilador forzado que, según hemos mostrado, no depende de las condiciones iniciales. En realidad, esta solución no es la solución general de la ecuación que estudiamos, y no describe completamente, por lo tanto, el comportamiento de los sistemas que estudiamos. La solución general de la ecuación diferencial del oscilador forzado consta de una solución particular de la ecuación

$$\frac{d^2\psi_p}{dt^2} + 2\gamma\frac{d\psi_p}{dt} + \omega_0^2\psi_p = f(t) \tag{45}$$

que es la que hemos tratado aquí, a la que debe añadirse la solución de la ecuación homogénea

$$\frac{d^2\psi_h}{dt^2} + 2\gamma\frac{d\psi_h}{dt} + \omega_0^2\psi_h = 0 \tag{46}$$

La solución ψ_h ya la hemos tratado: se trata de la solución del oscilador amortiguado, que, como vimos, depende de las condiciones iniciales y va desapareciendo con el tiempo. Representa unas fluctuaciones transitorias del sistema antes de alcanzar el estado estacionario, en el que sólo encontramos la solución exclusiva del oscilador forzado, independiente de las condiciones iniciales.

Problemas

Del libro de Álvarez-Ude, González y Raposo: capítulo 8, problemas 9,10.

Propuestos para la próxima clase:

1.- La figura 1 representa la amplitud de un oscilador mecánico forzado en función de la frecuencia, normalizada a la frecuencia natural ω_0, de la fuerza impulsora. Con los datos señalados en la gráfica, y sabiendo que el coeficiente de amortiguamiento γ vale 2 s^{-1}, determinar:

a) La frecuencia natural ω_0

b) El cociente (F_0/m) entre la amplitud de la fuerza impulsora y la masa del oscilador

2.- Un circuito RLC está alimentado por una señal de voltaje sinusoidal. En el régimen estacionario, la máxima carga que alcanzan las placas del condensador es de 100 nC, y el mayor valor de la corriente que recorre el circuito es de 3.14 mA. Los máximos de corriente preceden en 25 μs a los máximos en el voltaje aplicado. Sabiendo que la resistencia del circuito es de 30 Ω y que la autoinducción es de 10 mH, determinar:

a) La frecuencia ω de la señal aplicada al circuito

b) La frecuencia natural ω_0

c) La capacidad del condensador

d) El valor eficaz y la amplitud del voltaje aplicado

e) Si modificamos la frecuencia de la señal aplicada, ¿qué valores nos proporcionarían la máxima amplitud de las oscilaciones de carga y de intensidad de corriente en el circuito? ¿Cuál sería el valor de esas amplitudes? ¿Qué intervalo de tiempo transcurriría en cada caso entre los máximos de la corriente y los de voltaje aplicado?

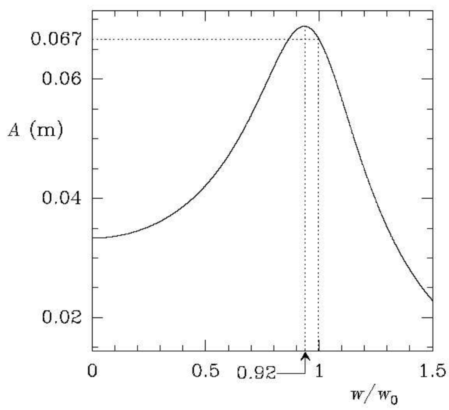
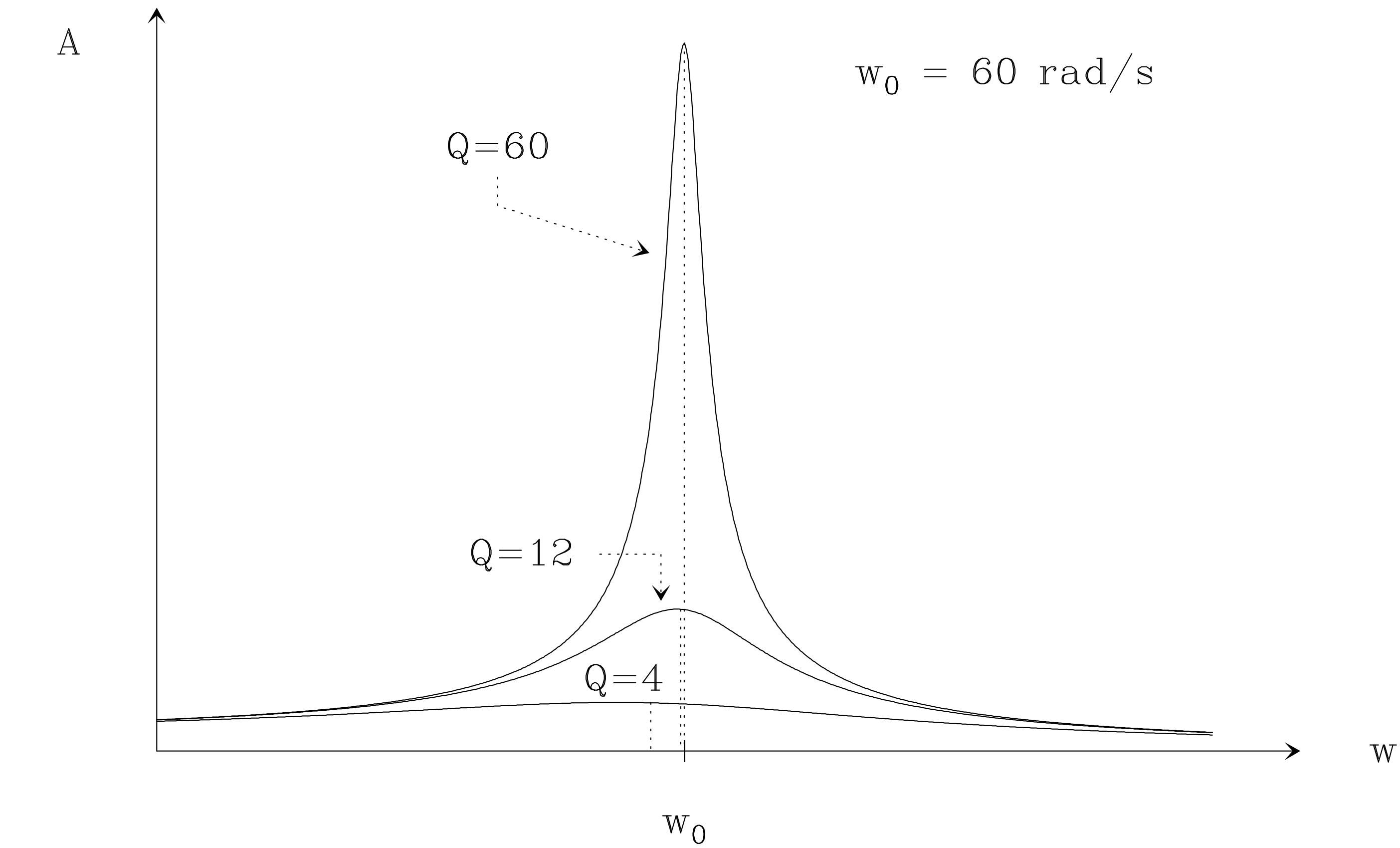
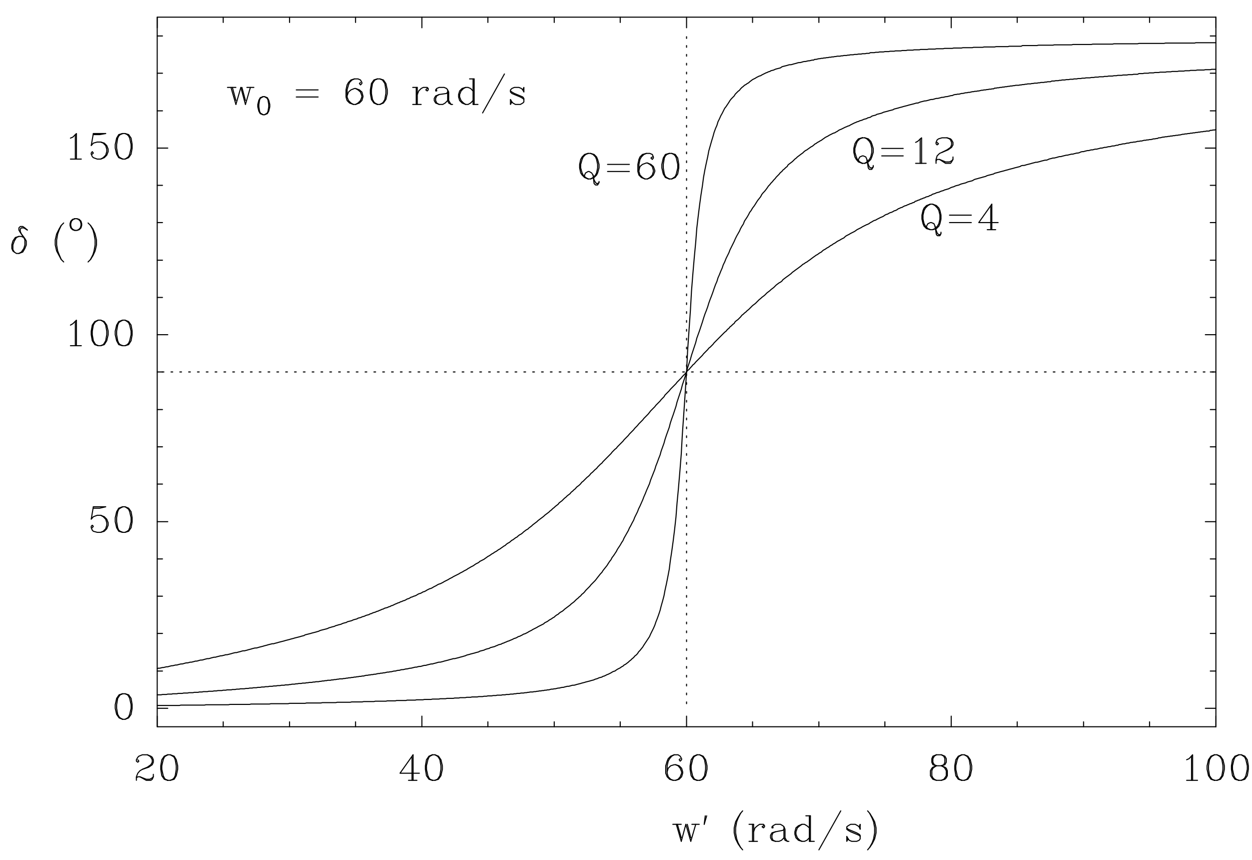
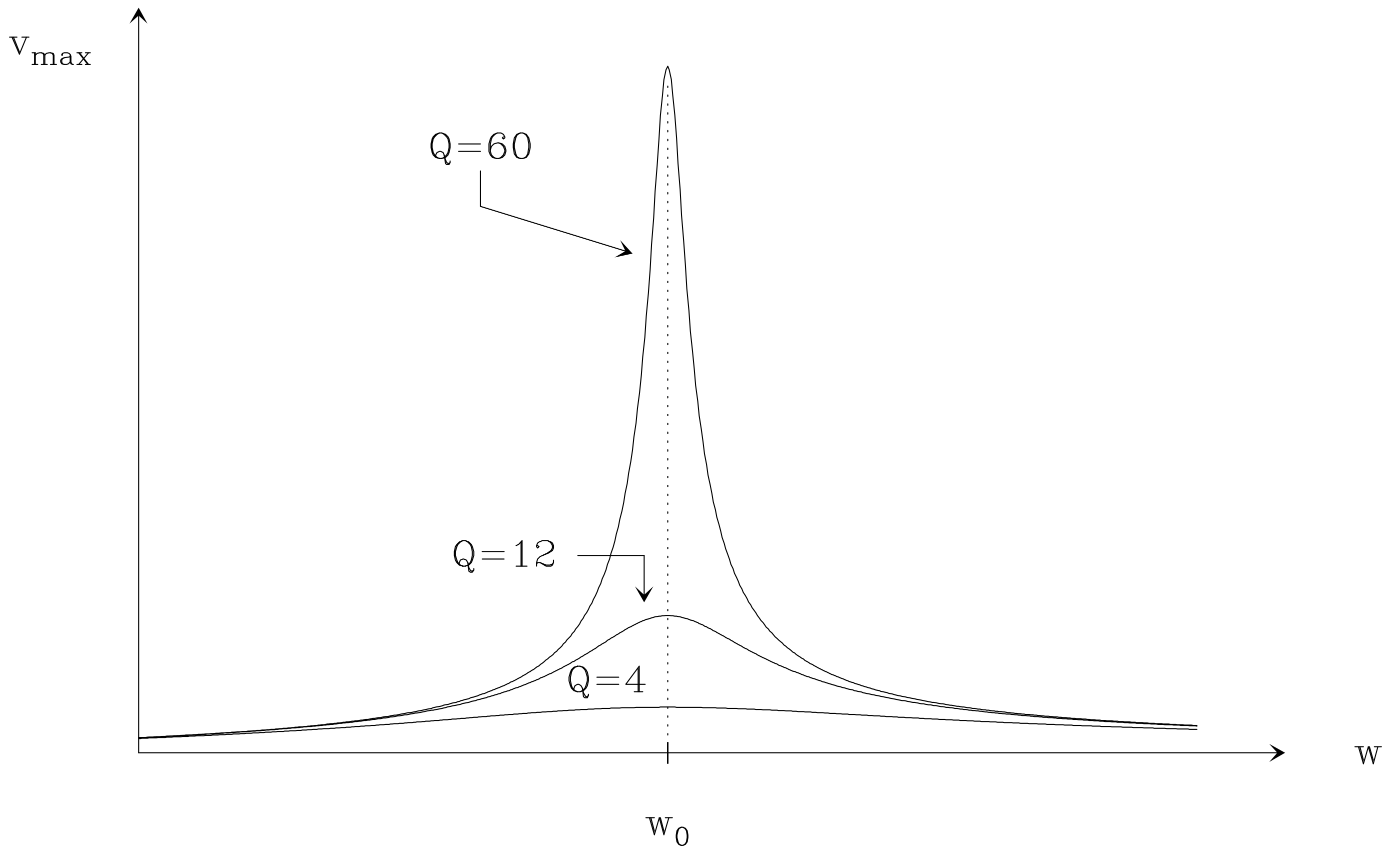


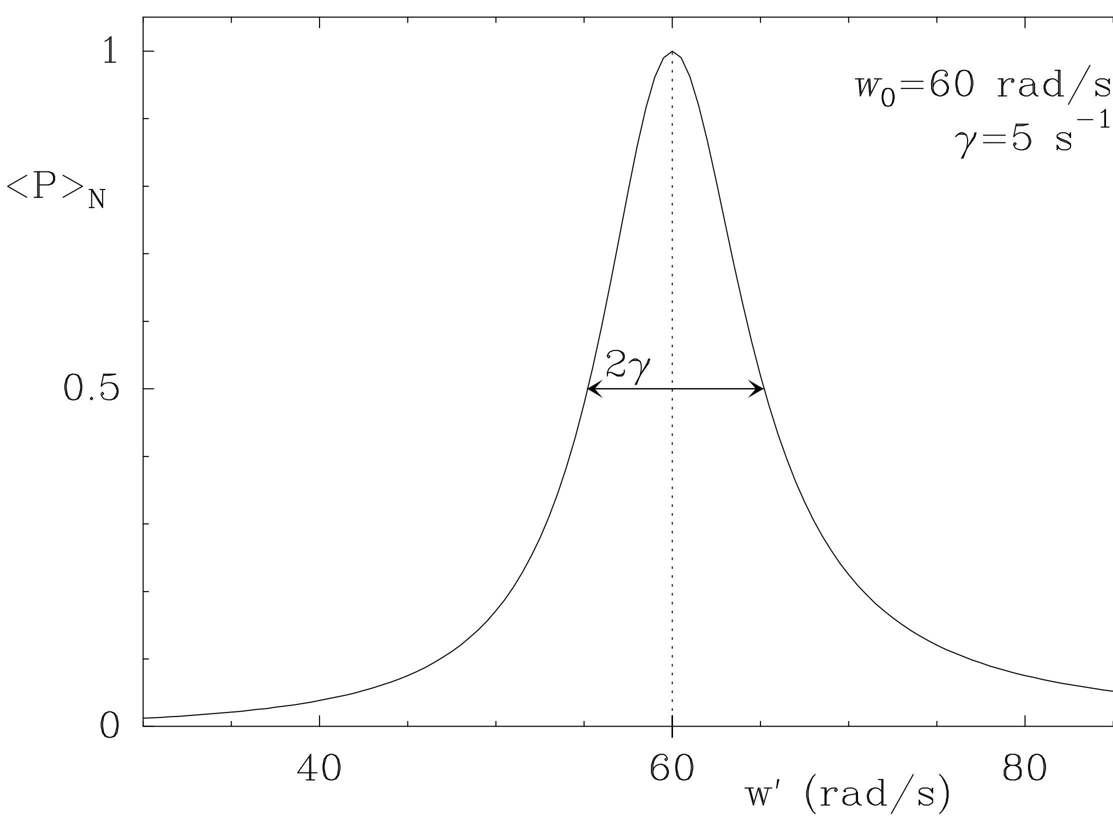
FIGURA 1: (Problema 1)


A
w_0 = 60 rad/s
Q=60
Q=12
Q=4
w′
w_0

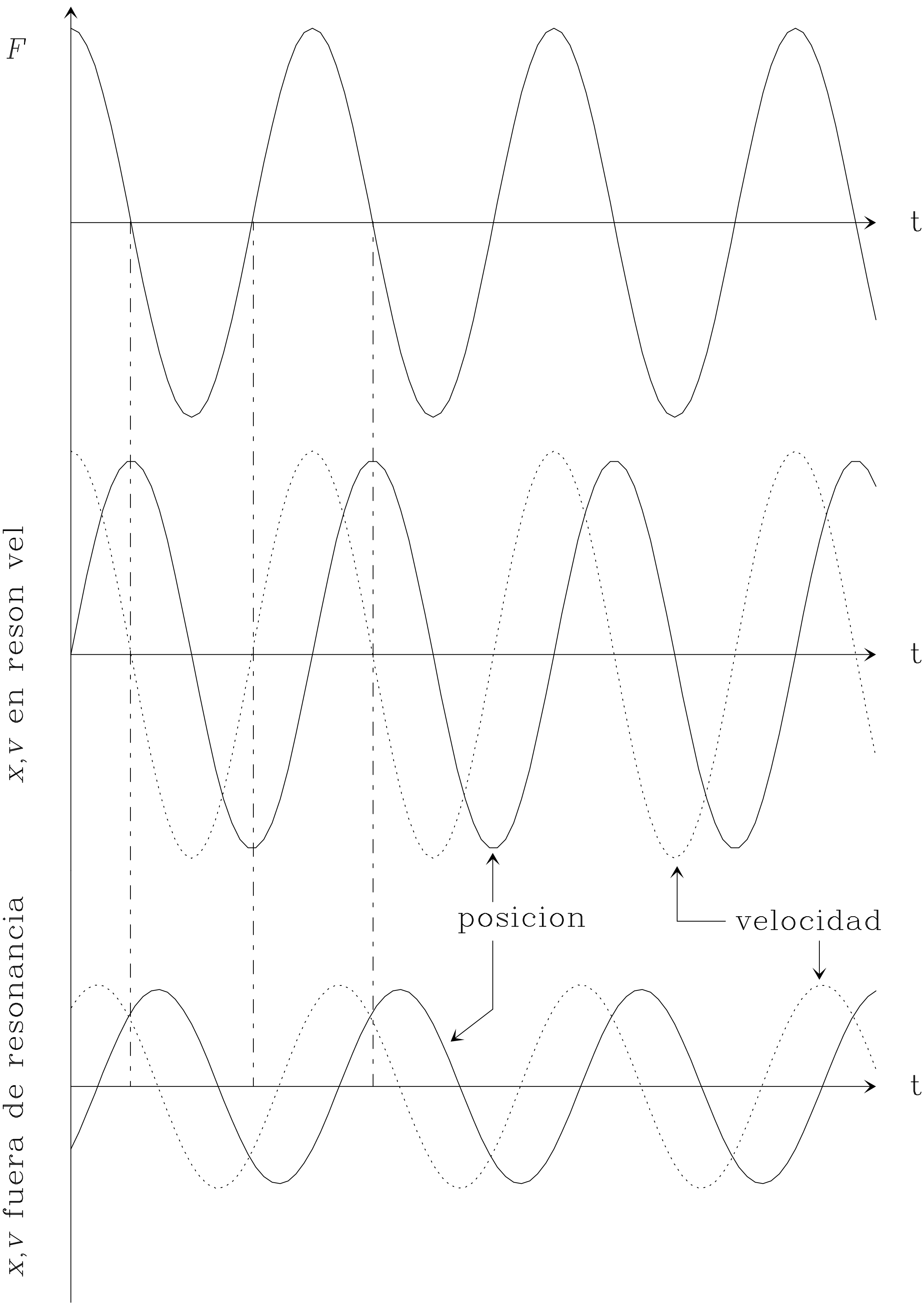

w_0 = 60 rad/s
Q=60
Q=12
Q=4
δ (°)
150
100
50
0
20
40
60
80
100
w′ (rad/s)



v max
Q=60
Q=12
Q=4
w′
w0



1
0.5
0
<P>N
w0=60 rad/s
γ=5 s−1
2γ
40
60
80
w′ (rad/s)


F
t
x, v en reson vel
t
posicion
velocidad
x, v fuera de resonancia
t