Oscilaciones amortiguadas

Al estudiar el oscilador armónico simple, encontramos que la energía total del sistema permanecía constante. Esto era así debido a que supusimos que no existía ningún mecanismo de disipación. En todos los sistemas reales, sin embargo, hay algún elemento de disipación de energía que, al ser considerado, conduce a una ecuación diferencial como la siguiente:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + 2\gamma\frac{d\psi}{dt} + \omega_0^2\psi = 0 \tag{1}$$

Aquí, $\psi(t)$ es la variable que caracteriza al sistema, ω_0 es la **frecuencia propia o natural**, según ya vimos, y γ es un nuevo parámetro que denominaremos **coeficiente de amortiguamiento**.

Amortiguamiento en el sistema masa-muelle

Imaginemos una masa m moviéndose en el seno de un fluido. Su velocidad en el instante $t = 0$ era v_0. El fluido ofrece una resistencia al movimiento que asumiremos que puede ser descrita por una fuerza de módulo proporcional a la velocidad y sentido opuesto a ella:

$$F = -bv \tag{2}$$

donde b es un coeficiente de rozamiento, dado en $kg \cdot s^{-1}$. Por la segunda ley de Newton

$$F = ma \tag{3}$$

y como

$$a = \frac{dv}{dt} \tag{4}$$

obtenemos de la primera de las ecuaciones que:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m}v \tag{5}$$

Integrando esta ecuación, comprobamos que su solución, dada la velocidad inicial v_0, es:

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{b}{m}t} \tag{6}$$

que es una exponencial decreciente que expresa la progresiva reducción de la velocidad debida a la fuerza de fricción, opuesta al movimiento. La rapidez con que se reduce la velocidad viene determinada por el cociente m/b: en un tiempo

$$t_e = \frac{m}{b} \tag{7}$$

la velocidad se reduce a $1/e$ de su valor inicial.

Si consideramos la energía cinética E_c, apreciamos asimismo un decrecimiento, naturalmente:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 e^{-\frac{2b}{m}t} \tag{8}$$

El decaimiento es más rápido que en el caso de la velocidad. En un tiempo

$$t_e = \frac{m}{2b} \tag{9}$$

la energía cinética se reduce a $1/e$ de su valor inicial.

El ritmo de decremento de la energía cinética es igual a la potencia disipada por la fricción:

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{1}{2}mv_0^2(-\frac{2b}{m})e^{-\frac{2b}{m}t} = -bv_0^2 e^{-\frac{2b}{m}t} = -bv^2 = \vec{F_{roz}} \cdot \vec{v} \tag{10}$$

Consideremos ahora que la masa m, además de estar sometida a la resistencia del fluido, se encuentra sujeta a un muelle de masa despreciable y constante elástica k. Tenemos que

$$F = ma = -kx - bv \tag{11}$$

Vamos a reescribir esa ecuación considerando que

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} \tag{12}$$

y que

$$v = \frac{dx}{dt} \tag{13}$$

Obtenemos, agrupando todos los términos en el mismo miembro, que:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{14}$$

Recordemos que la frecuencia propia del sistema es precisamente

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{15}$$

y definamos ahora el **coeficiente de amortiguamiento** para este sistema como

$$\gamma = \frac{b}{2m} \tag{16}$$

Este coeficiente es una característica del sistema que nos indica cuán rápido es el proceso de disipación de energía en él. Sus unidades son s^{-1}.

Podemos reescribir la ecuación en términos de estos parámetros como:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \tag{17}$$

Amortiguamiento en el circuito LC: el circuito RLC

Estudiemos ahora el efecto de una resistencia R en el circuito LC. Debe cumplirse en este circuito que:

$$L\frac{dI}{dt} + IR + \frac{q}{C} = 0 \tag{18}$$

Utilizando que

$$I(t) = \frac{dq}{dt} \tag{19}$$

obtenemos

$$L\frac{dI}{dt} + IR + \frac{q}{C} = 0 \tag{20}$$

Dividiendo por L, llegamos a:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0 \tag{21}$$

El parámetro ω_0 representa la frecuencia propia del circuito LC:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \tag{22}$$

y el **coeficiente de amortiguamiento** γ viene ahora dado por:

$$\gamma = \frac{R}{2L} \tag{23}$$

Podemos escribir la ecuación incluyendo esos parámetros:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\gamma\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0 \tag{24}$$

El desplazamiento x de la masa sujeta al muelle y sometida a la fricción, y la carga q en las placas de un condensador en un circuito RLC están regidos por la misma ecuación diferencial, una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, de segundo orden, a cuya solución nos dedicamos a continuación.

Resolución de la ecuación diferencial del oscilador amortiguado

Deseamos encontrar la función $\psi(t)$ que satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + 2\gamma\frac{d\psi}{dt} + \omega_0^2 \psi = 0 \tag{25}$$

Nos interesa de modo particular si son posibles soluciones oscilatorias, así que *probaremos* una del tipo

$$\psi = Acos(\omega t + \phi_0) \tag{26}$$

Aquí desconocemos A, ω y ϕ_0, ni siquiera sabemos si esto puede ser una forma de solución admisible, pero la introduciremos en la ecuación. Al hacerlo, llegamos a una expresión que no tiene un tratamiento fácil. Existe una manera más sencilla de probar una solución del tipo deseado: ¿no nos da igual, en lugar de proponer la solución

$$\psi = Acos(\omega t + \phi_0) \tag{27}$$

proponer mejor esta otra:

$$z = Ae^{j(\omega t + \phi_0)} \tag{28}$$

aunque sea compleja? Basta con recordar que la solución que buscamos nos la da la parte real de esa expresión.

Así, si escribimos la ecuación

$$\frac{d^2z}{dt^2} + 2\gamma\frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = 0 \tag{29}$$

y consideramos que

$$\frac{dz}{dt} = j\omega z \tag{30}$$

y que

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\omega^2 z \tag{31}$$

encontramos que la ecuación diferencial se reduce a la ecuación algebraica:

$$(\omega_0^2 - \omega^2) + 2j\gamma\omega = 0 \tag{32}$$

Esta expresión indica, para empezar, que, si hay amortiguamiento (γ no es nulo), entonces ω tiene que ser un número complejo para que esa ecuación se satisfaga; así que debe tener la forma:

$$\omega = \omega_r + j\omega_i \tag{33}$$

donde ω_r y ω_i son reales.

Al introducir este número complejo en la ecuación anterior, llegamos a estas dos expresiones:

$$\omega_r^2 - \omega_i^2 - \omega_0^2 + 2\gamma\omega_i = 0 \tag{34}$$

$$\omega_r(\omega_i - \gamma) = 0 \tag{35}$$

a partir de ellas podemos determinar ω_r y ω_i, lo que a su vez nos permitirá escribir z y, tomando su parte real, determinar la solución ψ que nos interesa. Al resolver este sistema de ecuaciones, encontramos que hay tres comportamientos distintos en función de cuál sea la relación entre los parámetros ω_0 y γ del sistema.

1.- Oscilaciones amortiguadas

Cuando $\omega_0 > \gamma$, la solución adopta la siguiente forma:

$$\psi(t) = A_0 e^{-\gamma t} cos(\omega t + \phi_0) \tag{36}$$

Hay oscilaciones de frecuencia

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \tag{37}$$

con una amplitud que decae con el tiempo según

$$A(t) = A_0 e^{-\gamma t} \tag{38}$$

Dado que tratamos con un ecuación diferencial de segundo orden, en la solución ψ nos quedan dos constantes, A_0 y ϕ_0, que deben ser determinadas a partir de las condiciones iniciales.

2.- Sobreamortiguamiento

Cuando $\omega_0 < \gamma$, la solución adopta la siguiente forma:

$$\psi(t) = A_1 e^{-(\gamma+\beta)t} + A_2 e^{-(\gamma-\beta)t} \tag{39}$$

donde

$$\beta = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \tag{40}$$

En este caso, la solución decae con el tiempo sin que el sistema presente oscilaciones. De nuevo tenemos dos constantes que se ajustan a las condiciones iniciales.

3.- Amortiguamiento crítico

El caso en que $\omega_0 = \gamma$ no está contemplado por las soluciones anteriores (de darse esta igualdad en ellas, nos quedaríamos con una sola constante por definir). Esta situación particular posee su propia solución, que vendría dada por:

$$\psi(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\gamma t} \tag{41}$$

según puede comprobar el paciente alumno que nos lee, sustituyendo esta expresión en la ecuación diferencial de partida. De nuevo encontramos aquí dos constantes para ajustar a las dos condiciones iniciales. Este caso se conoce como de *amortiguamiento crítico*, y está caracterizado por ser el de una más rápida decadencia con el tiempo.

Disipación en las oscilaciones amortiguadas

Ciñámonos ahora el caso $\gamma << \omega_0$, que corresponde al de oscilaciones amortiguadas, con un amortiguamiento débil. La amplitud de dichas oscilaciones decrecía con el tiempo según:

$$A(t) = A_0 e^{-\gamma t} \tag{42}$$

Restringiéndonos a situaciones en las que γ no sólo es menor que ω_0, sino *mucho menor*, puede comprobarse que la energía total en las oscilaciones amortiguadas es proporcional al cuadrado de la amplitud A

$$E(t) \propto A^2(t) \tag{43}$$

lo que también sucedía en el oscilador armónico simple. La diferencia estriba en que en este último la amplitud y la energía se mantenían constantes a lo largo del tiempo, mientras que en las oscilaciones amortiguadas al decrecimiento exponencial de la amplitud se asocia un decrecimiento también exponencial, pero más rápido, de la energía, dado por

$$E(t) = E_0 e^{-2\gamma t} \tag{44}$$

La variación con el tiempo de esta energía viene dada por

$$\frac{dE}{dt} = -2\gamma E_0 e^{-2\gamma t} \tag{45}$$

que coincide con la potencia disipada en el sistema, por el rozamiento en el masa-muelle, y por la resistencia en el circuito RLC.

Veamos el caso de la masa y el muelle:

Las oscilaciones amortiguadas del desplazamiento x vienen dadas por

$$x(t) = A_0 e^{-\gamma t} cos(\omega t + \phi_0) \tag{46}$$

con una frecuencia de oscilación ω

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - (\frac{b}{2m})^2} \tag{47}$$

La energía elástica es

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA_0^2 e^{-2\gamma t} cos^2(\omega t + \phi_0) \tag{48}$$

y la cinética

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m[-\gamma A_0 e^{-\gamma t} cos(\omega t + \phi_0) - \omega A_0 e^{-\gamma t} sen(\omega t + \phi_0)]^2 \tag{49}$$

Sumando ambas, obtenemos la energía total:

$$E = U + T = [\frac{1}{2}k + \frac{1}{2}m\gamma^2]A_0^2 e^{-2\gamma t} cos^2(\omega t + \phi_0) + \tag{50}$$

$$+\frac{1}{2}m\omega^2 A_0^2 e^{-2\gamma t} sen^2(\omega t + \phi_0) + \tag{51}$$

$$+\frac{1}{2}m\gamma\omega A_0^2 e^{-2\gamma t} sen(\omega t + \phi_0) cos(\omega t + \phi_0) \tag{52}$$

En la aproximación que consideramos

$$\frac{\gamma}{\omega_0} << 1 \tag{53}$$

$$\omega \approx \omega_0 \tag{54}$$

lo que reduce la expresión de la energía total a

$$E = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A_0^2 e^{-2\gamma t} \tag{55}$$

La variación temporal de esta energía está dada por:

$$\frac{dE}{dt} = -m\gamma\omega_0^2 A_0^2 e^{-2\gamma t} \tag{56}$$

que es igual a la potencia disipada por la fricción, promediada en un período de la oscilación

$$P = < -bv^2 > \tag{57}$$

Problemas

Del libro de Álvarez-Ude, González y Raposo: capítulo 8, problemas 4-8, 15, 18.

Propuestos para la próxima clase:

1.- La figura 1 muestra la evolución temporal, a partir de cierto instante arbitrario, de la carga en las placas de un condensador, el cual forma parte de un circuito RLC que oscila libremente. A partir de los valores numéricos dados en la gráfica, determine:

a) La frecuencia de oscilación ω y el coeficiente de amortiguamiento γ.

b) La frecuencia natural ω_0.

c) Escriba la expresión que rige la evolución temporal de la amplitud de carga, y la que rige la evolución temporal de la carga, suponiendo nula la fase en el origen y una amplitud de carga en el instante inicial de 3 nC.

d) Si el coeficiente de autoinducción del circuito es L=9 mH, determine los valores de la capacidad C y de la resistencia R.

e) ¿Cuánto tiempo tarda la energía total en el circuito en reducirse a la décima parte de su valor inicial? ¿Cuántas oscilaciones ha realizado el sistema llegado ese momento?

2.- Se dispone una masa M=0.01 Kg según el esquema de la figura 2, donde los muelles poseen la misma constante elástica k. Se mueve ligeramente y se le deja oscilar libremente, comprobando que tras efectuar n=15 oscilaciones la amplitud del movimiento se reduce a 0.009 veces su valor inicial. Determine:

a) El cociente $Q = (\omega_0/\gamma)$, donde ω_0 es la frecuencia natural y γ el coeficiente de amortiguamiento del oscilador.

b) Cuánto se habrá reducido la energía del oscilador con respecto a la inicial.

c) Cómo y cuánto como mínimo habría que modificar M para que el sistema no presentase oscilaciones.

d) Si en el esquema original (con M=0.01 Kg) las oscilaciones amortiguadas tienen un período de 31.46 ms, ¿cuánto vale el período de las oscilaciones no amortiguadas? ¿Cuánto valen las constantes elásticas de los muelles y el coeficiente de rozamiento b con el aire?

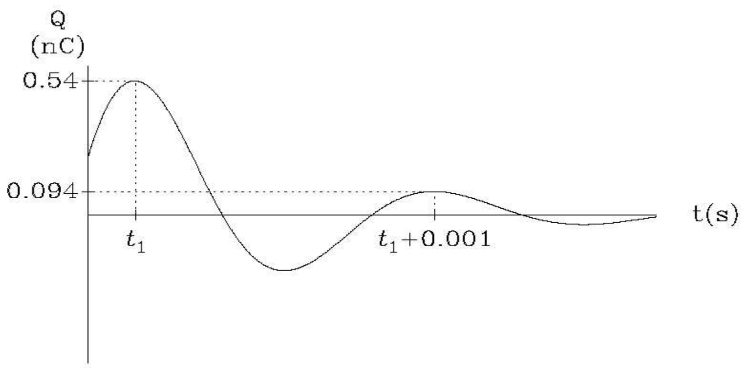


FIGURA 1: (Problema 1)

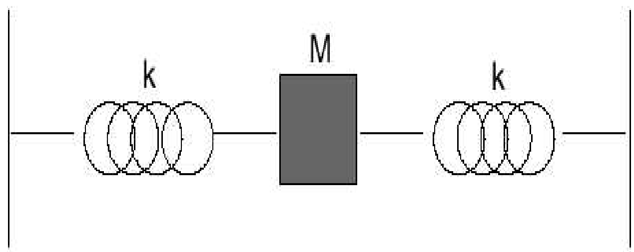
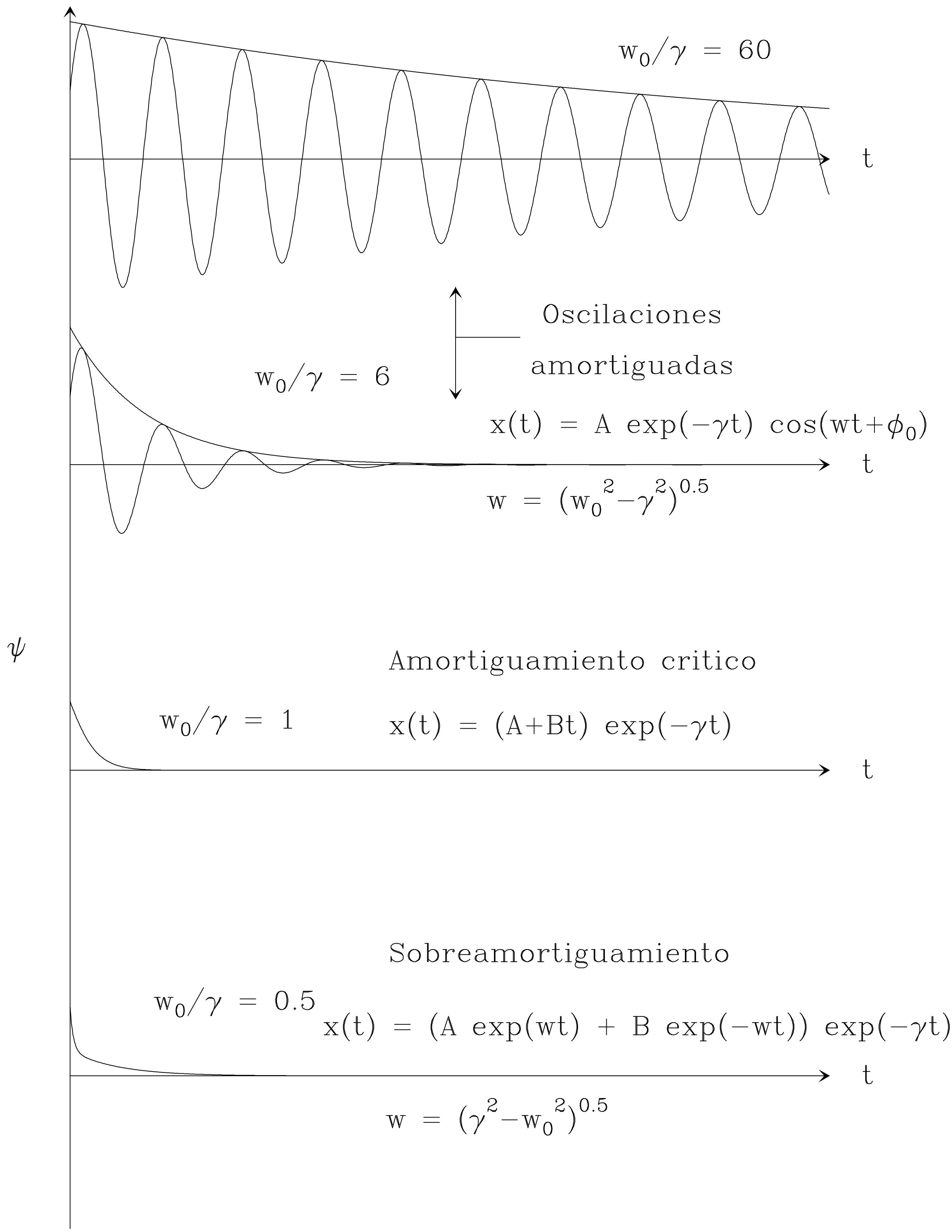


FIGURA 2: (Problema 2)

MOVIMIENTO OSCILATORIO AMORTIGUADO



MOVIMIENTO OSCILATORIO AMORTIGUADO

$w_0/\gamma = 25$