Vectores rotatorios. Método del exponente complejo.

Relación entre Movimiento Armónico Simple y Movimiento Circular Uniforme

Si trazamos una circunferencia de radio A (figura 1), las coordenadas en los ejes XY de un punto P sobre ella pueden escribirse como

$$x = Acos\ \phi\ ;\ y = Asen\ \phi \tag{1}$$

Supongamos que lo que tenemos es una partícula que recorre esa circunferencia en un Movimiento Circular Uniforme, cambiando su ángulo ϕ a una velocidad angular constante ω_0, es decir

$$\phi(t) = \omega_0 t + \phi_0 \tag{2}$$

En un instante t cualquiera, la partícula se encuentra en el punto:

$$x = Acos(\omega_0 t + \phi_0)\ ;\ y = Asen(\omega_0 t + \phi_0) \tag{3}$$

De manera que si, dado un Movimiento Circular Uniforme, miramos el movimiento proyectado en uno sólo de los ejes, lo que tenemos es un Movimiento Armónico Simple.

Método del exponente complejo

La conexión entre el MCU y el MAS ofrece la posibilidad de representar a este último en la forma de un **vector rotatorio** o **fasor**: efectivamente, si tenemos una masa moviéndose en el eje X según la expresión habitual $x = Acos(\omega_0 t+\phi_0)$, imaginaremos que a este movimiento real se halla asociado otro hipotético $y = Asen(\omega_0 t + \phi_0)$, y que la composición de ambos arroja un MCU. Para recuperar el MAS real, no tenemos más que tomar la parte x y desechar la y.

Podemos expresar esto en forma vectorial, escribiendo el vector

$$\vec{X} = x\vec{u_x} + y\vec{u_y} = [Acos(\omega_0 t + \phi_0)]\vec{u_x} + [Asen(\omega_0 t + \phi_0)]\vec{u_y} \tag{4}$$

o bien podemos asociar al MAS x el siguiente **número complejo**:

$$z = x + jy = [Acos(\omega_0 t + \phi_0)] + j[Asen(\omega_0 t + \phi_0)] \tag{5}$$

donde j es el número complejo $j = \sqrt{-1}$.

Así, z es un fasor en Movimiento Circular Uniforme en el plano complejo; su parte real, x, es el MAS que estudiamos. Este tratamiento tiene algunas ventajas, dado que, a partir de la **relación de Euler**

$$e^{j\phi} = cos\ \phi + jsen\ \phi \tag{6}$$

podemos escribir z como

$$z = Ae^{j(\omega_0 t + \phi_0)} \tag{7}$$

lo que facilitará nuestro análisis de las oscilaciones más adelante.

Al derivar con respecto al tiempo, encontramos que

$$z' = \frac{dz}{dt} = j\omega_0 Ae^{j(\omega_0 t + \phi_0)} = j\omega_0 z \tag{8}$$

El fasor z' obtenido al derivar forma un ángulo de 90°, medido en el sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj, con el fasor z.

Problemas

- Comprobar que z, dado por

$$z = Ae^{j(\omega_0 t + \phi_0)} \tag{9}$$

  cumple la ecuación diferencial del oscilador armónico.

  Mostrar que la relación

$$z' = \frac{dz}{dt} = j\omega_0 z \tag{10}$$

  sigue siendo válida si se utiliza la representación

$$z = [Acos(\omega_0 t + \phi_0)] + j[Asen(\omega_0 t + \phi_0)] \tag{11}$$

- Demostrar que la multiplicación de cualquier número complejo z por $e^j\theta$ puede describirse, en términos geométricos, como una rotación positiva, en un ángulo θ, del fasor que representa a z, sin alteración de su longitud.

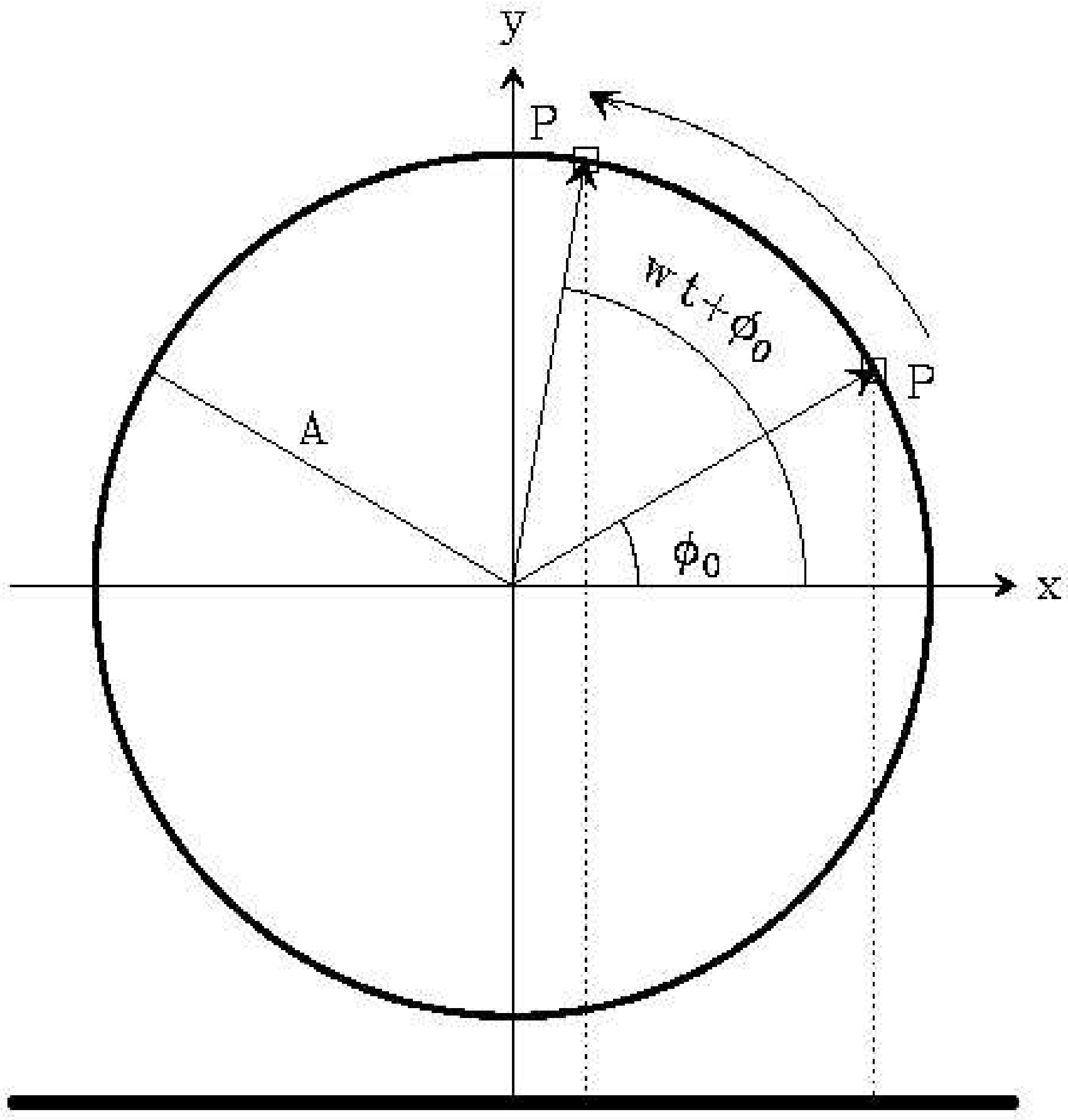
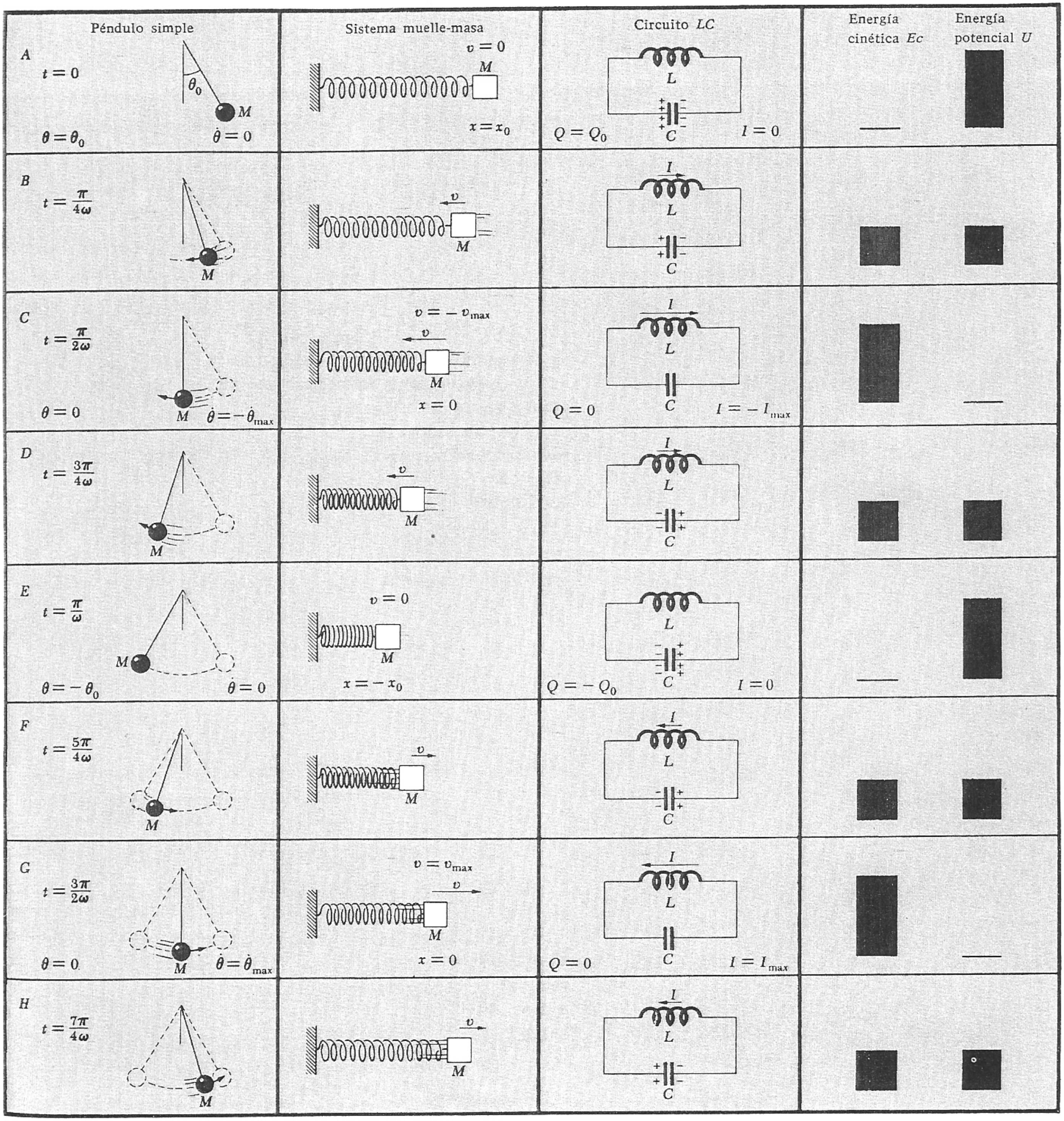


FIGURA 1: Movimiento Armónico Simple y Movimiento Circular Uniforme. Vectores rotatorios.


Péndulo simple
Sistema muelle-masa
Circuito LC
Energía cinética Ec
Energía potencial U
A
t = 0
θ = θ₀
θ̇ = 0
v = 0
x = x₀
Q = Q₀
I = 0
B
t = π/4ω
C
t = π/2ω
θ = 0
θ̇ = −θ̇max
v = − vmax
x = 0
Q = 0
I = − Imax
D
t = 3π/4ω
E
t = π/ω
θ = − θ₀
θ̇ = 0
v = 0
x = − x₀
Q = − Q₀
I = 0
F
t = 5π/4ω
G
t = 3π/2ω
θ = 0
θ̇ = θ̇max
v = vmax
x = 0
Q = 0
I = Imax
H
t = 7π/4ω