Movimiento Armónico Simple (M.A.S.)

Ecuación diferencial del Oscilador Armónico

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\omega_0^2\psi \tag{1}$$

Su solución viene dada por:

$$\psi(t) = Acos(\omega_0 t + \phi_0) \tag{2}$$

- A ($A > 0$): **amplitud**, máximo (en valor absoluto) que alcanza ψ en su oscilación. Sus unidades son las mismas que las de la variable ψ.
- El término $(\omega t + \phi_0)$ es el argumento o **fase** de la función coseno. Se expresa en **radianes**.
- ϕ_0 es la **fase inicial**. Se expresa en radianes y determina el valor de ψ en el instante inicial.
- ω_0 es la **frecuencia angular propia o natural** del sistema en consideración. Se expresa en $rad \cdot s^{-1}$. El periodo de las oscilaciones, T, se relaciona con ω_0 a través de:

  $$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \tag{3}$$

  y se mide en segundos.

  La frecuencia lineal o **frecuencia propia o natural** de las oscilaciones viene dada por:

  $$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{T} \tag{4}$$

  y se expresa en $s^{-1} = Hz$

La **amplitud** A y la **fase inicial** ϕ_0 dependen de las **condiciones iniciales**. La **frecuencia propia** es, en cambio, una propiedad característica del sistema.

Ejemplo 1: masa y muelle

¿Qué ecuación diferencial rige el movimiento de una **masa** m adosada a un muelle de **constante elástica** k?

- Si denominamos x ($x = x(t)$) al desplazamiento de la masa de su posición de equilibrio, la fuerza de recuperación ejercida por el muelle sobre la masa puede escribirse como:

$$F = -kx \tag{5}$$

- Por la Segunda Ley de Newton, tenemos:

$$F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{6}$$

  donde a es la aceleración de la masa m.

De las dos expresiones previas, se obtiene

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \tag{7}$$

que es la ecuación de un M.A.S. con frecuencia

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{8}$$

El desplazamiento x en función del tiempo está dado por:

$$x = x_0 cos(\omega_0 t + \phi_0) \tag{9}$$

donde x_0 y ϕ_0 se hallan a partir de las condiciones iniciales de desplazamiento ($x(t = 0)$) y de velocidad ($v(t = 0)$).

Ejemplo 2: circuito LC

Un circuito LC consta de dos elementos: un condensador, de capacidad C, y una autoinducción L. Las variables que describen al sistema son la carga $q(t)$ en las placas del condensador y la intensidad de corriente $I(t)$ que recorre el circuito. Estas dos variables no son independientes, dado que la corriente implica una variación de carga en las placas del condensador:

$$I(t) = \frac{dq}{dt} \tag{10}$$

En este circuito, la diferencia de potencial entre los bornes del condensador ($\frac{q}{C}$) debe igualar la que hay entre los de la autoinducción ($-L\frac{dI}{dt}$), de manera que ha de verificarse que

$$-L\frac{dI}{dt} = \frac{q}{C} \tag{11}$$

Si consideramos la conexión existente entre q e I y la incluimos aquí, vemos que

$$-L\frac{d^2q}{dt^2} = \frac{q}{C} \tag{12}$$

y si además lo reorganizamos un poco

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{q}{LC} \tag{13}$$

Esta ecuación es de nuevo la correspondiente a un M.A.S. El comportamiento del circuito LC se rige por la misma expresión que el sistema masa-muelle.

La carga $q(t)$ vendrá dada por:

$$q = Q_0 cos(\omega_0 t + \phi_0) \tag{14}$$

La amplitud Q_0 y la fase inicial ϕ_0 se determinan a partir de los valores iniciales de la carga ($q(t = 0)$) y de la intensidad de corriente ($I(t = 0)$). La frecuencia ω_0, que es la frecuencia propia o natural del circuito LC, depende de las características del mismo, y vale:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \tag{15}$$

Ejemplo 3: oscilaciones de un plasma

Animamos a nuestro estimado lector a consultar un ejemplo más en el libro de Feynman, volumen II, capítulo 7, epígrafe III.

Problemas

Del libro de Álvarez-Ude, González y Raposo: capítulo 8, problemas 1-3, 14, 16, 17.

Propuestos para la próxima clase:

- Determinar la frecuencia propia y el periodo de las oscilaciones libres de un péndulo formado por una cuerda de longitud $l = 1m$, de cuyo extremo cuelga una masa de $1kg$. ($g = 9{,}8m/s^2$).
- Se tiene una masa m de 10 kg suspendida verticalmente de un extremo de un muelle de constante elástica $k = 160N \cdot m^{-1}$ y longitud natural $l_0 = 30cm$. ¿Qué tipo de oscilaciones presenta el sistema? ¿Puede determinarse su frecuencia y periodo? En caso afirmativo, ¿cuánto valen?
- En un circuito LC, el periodo de las oscilaciones libres vale 6.28 μs. i) Escriba la expresión de la carga $q(t)$ en las placas del condensador en función del tiempo si en el instante t=0 s se tiene que la carga es de 1 nC y la intensidad de corriente I que recorre el circuito es de 0 A. ii) ¿Cuánto vale la autoinducción si la capacidad es de 1 nF? iii) ¿En qué instantes se tiene que la carga es de 0.5 nC? ¿Cuánto vale la intensidad de corriente en esos instantes? iv) Represente de modo aproximado, a partir del instante t=0 s, un ciclo completo de la oscilación de la carga y de la intensidad de corriente. ¿Cuánto vale el desfase entre $q(t)$ e $I(t)$?